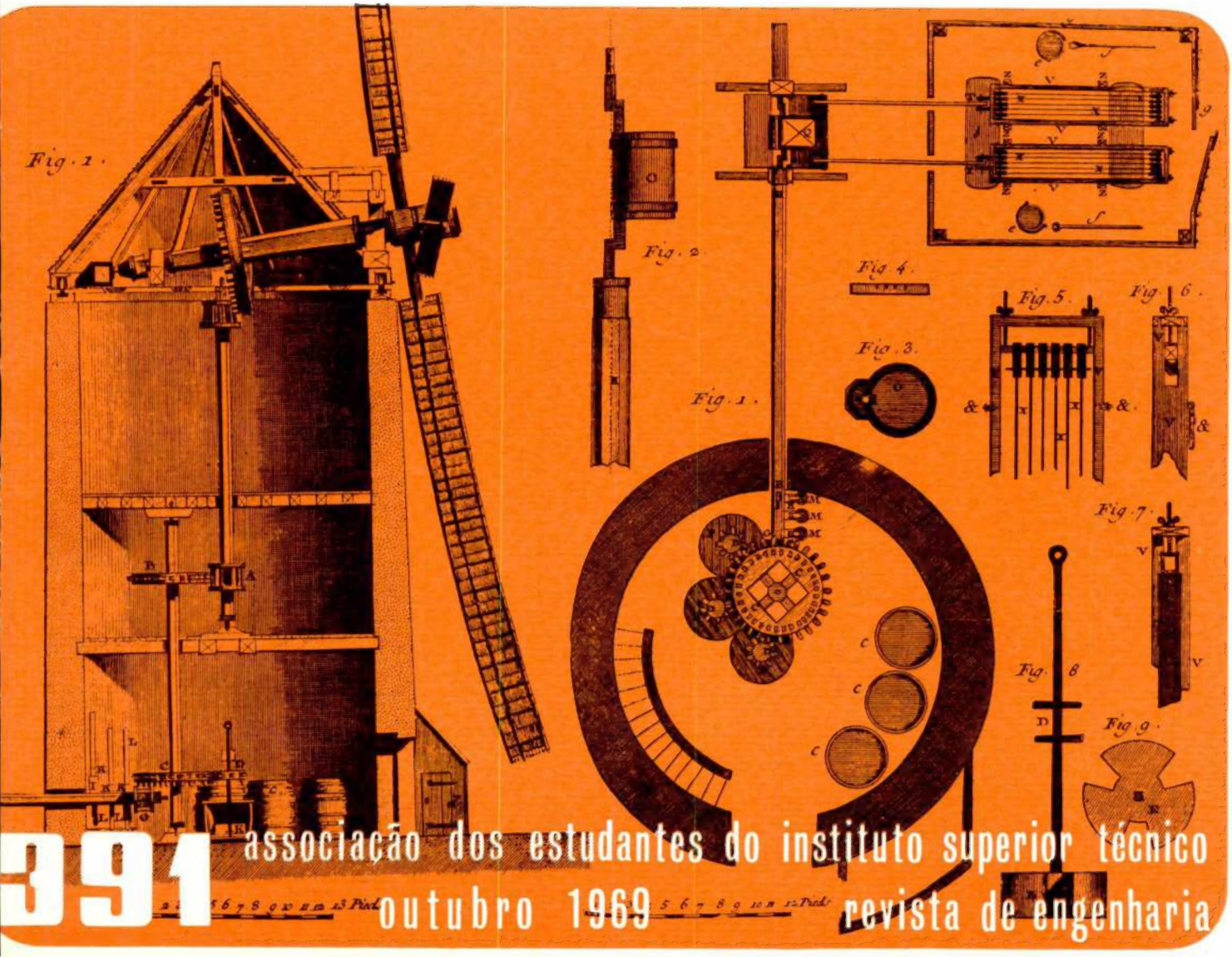
técnica



391 associação dos estudantes do instituto superior técnico
outubro 1969 revista de engenharia

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

Fenner

REDUTORES DE VELOCIDADE
TIPO «PONTA DE VEIO»

mais de cem anos de progresso dos maiores fabricantes ingleses

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:
AUTO-LUSITANIA
ALFREDO DUARTE L^da
AV. DA LIBERDADE 73-77 LISBOA

7.000 obras realizadas

coberturas
perfis especiais
vigas pré-esforçadas
pavimento trief
protecção de segurança

materiais novobra

pavimentos
em betão pré-esforçado
(homologados pelo Lab. Nac. de Engenharia Civil)

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100 - 5.º D.º - TEL. 774832 / 771603 - LISBOA 5

CIMENTO SECIL

Fábrica:
Outão — Setúbal
Telef. 228824/5

Escritório:
R. do Comércio, 56-3.º
LISBOA 2
Telef. 328201/2/3

técnica

NÚMERO 391 OUTUBRO DE 1969 ANO XLIV VOLUME XXXI PUBLICAÇÃO MENSAL

Director

João Soares Alves

Administrador

Silvério de Sousa Mendes

Secretário

Rui Coutinho Torrinha

Chefe de Redacção

Vladimiro de Oliveira

Redactores

Alvaro Manuel Cortez
Francisco Toco Emílio
Henrique Nunes Garcia
Maria Manuela Mota

Assinaturas

		5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	—	70$00	130$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	80$00	140$00
Estrangeiro	—	90$00	150$00

Número avulso — 20$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 103 — Lisboa

SUMÁRIO

1 *ALEXANDRE CERVEIRA, COSTA FRANÇA, NUNES DOS SANTOS* — **Algoritmo F.F.T. para determinação da transformada de Fourier — Sua programação em Fortran.**

F.F.T. Algorithm to determine the Fourier transformed — Fortran Program.

15 *ENCARNAÇÃO COELHO* — **Condução de calor numa placa em regime transiente (distribuição inicial de temperaturas não uniforme).**

Conduction of heat in a plate for the transient state (initial non uniform distribution of temperatures).

31 *PERES RODRIGUES* — **Determinação das características de corte de rochas e de deslizamento de diaclases — Influência da obliquidade da superfície de ensaio.**

Determination of the shear characteristics of rocks and of sliding of diaclases — The influence of the obliquity of the test surfaces.

43 *JANEIRO BORGES* — **O túnel aerodinâmico do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.**

The wind tunnel of the «Laboratório Nacional de Engenharia Civil».

51 *DIOGO COSTA* — **Assistência à indústria promovida pelo Núcleo de Metalurgia do INII.**

57 **Do Mundo Técnico.**

A Radiografia Televisionada para produção em série. — Um novo aparelho para estudo de montagens com circuitos integrados — Circuitos impressos flexíveis.

30 **Notas informativas.**

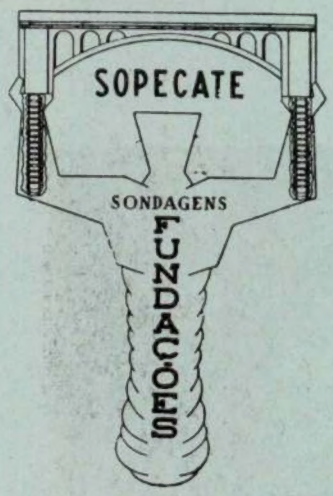
Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional.

61 **Bibliografia**

CAPA: Moinho para serração e preparação de pedra — Gravura de Bernard Direx de 1775.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXX
Aguiar & Melo	XXIX
Asea Eléctrica	V e XXXIII
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Centro Técnico Hospitalar	XXXI
Cimento Secil	2.ª da capa
Cometna	XXII
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Construções Técnicas	XVII
Construções Schréder	XX
Dial	XXV
Electro-Arco, Lda.	II
Empresa de Cimentos de Leiria	XXXII
Empresa Electro Cerâmica	XXVII
Empresa de Produtos Asfálticos	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fábrica Portugal	XXII
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Frapil	XV
Guedes & Almeida, Lda.	VIII e XXVI
Harker Sumner	XXIV
Heliaço	2.ª da capa
Hidrel	XXV
Hoechst Portuguesa	XXXIII
INA	XXXIV
I. S. T.	XXVII
Isolux	XXVI
Jayme da Costa, Lda.	XIX
Johann Keller	XXV
J. F. Azevedo e Silva	IV
J. Roma	VII
MAGUE	XIII
Mendes de Almeida, S A.R.L.	XXIII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Nucleon	V
Orlando Fernandes, Lda.	V, VII e XXXIV
Prisma	XXV
ROMAR	XXII
Rotring	XXVIII
Siemens	XXI
Soc. Electricidade Brown Boveri	4.ª da capa
Soc. Amadeu Gaudêncio	XXVII
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
Somague	XXXIV
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	VII
Sopecate	II
SEPSA	XIV
Standard Eléctrica	IX
Wild Portugal, Lda.	III



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

- ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA
- SONDAGENS
- REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS
- FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA - 1
- TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

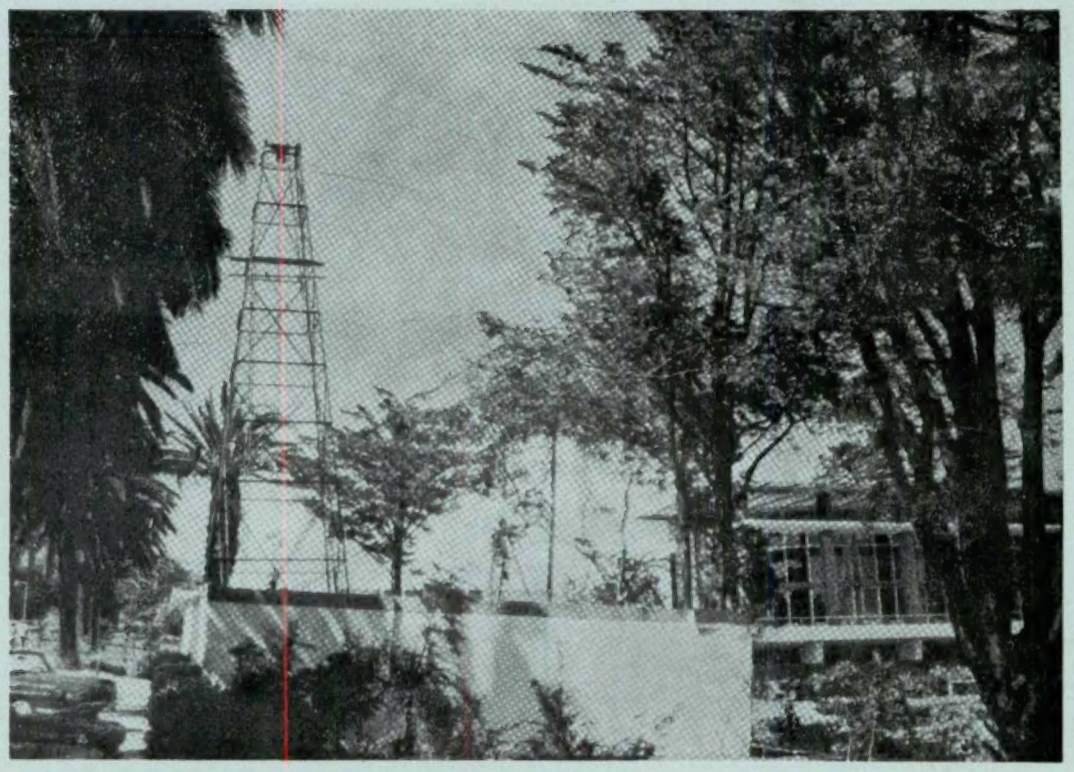
MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

—

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73



CAPTAÇÃO DE AGUAS NO PARQUE ESTORIL, PARA A FIRMA ESTORIL SOL

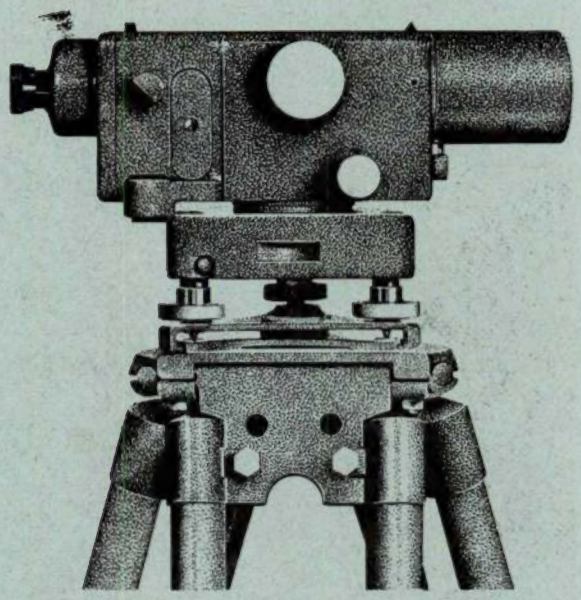
FUNDAÇÕES FRANKI L.DA

RUA BRAAMCAMP, 13-3.º — LISBOA 1 — TEL. P. P. C. 53 41 12/3/4 — ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI — LISBOA

O novo Nível automático de engenheiro

WILD NAK 2

com círculo horizontal



WILD
HEERBRUGG

Para nivelamentos de média e grande precisão; com micrómetro de lâmina de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo: ± 1,5 mm

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo com micrómetro: ± 0,4 mm

Luneta de 30 × de aumento com imagem direita de observação

Solicitem catálogo ou demonstração aos representantes exclusivos

WILD PORTUGAL, LDA.

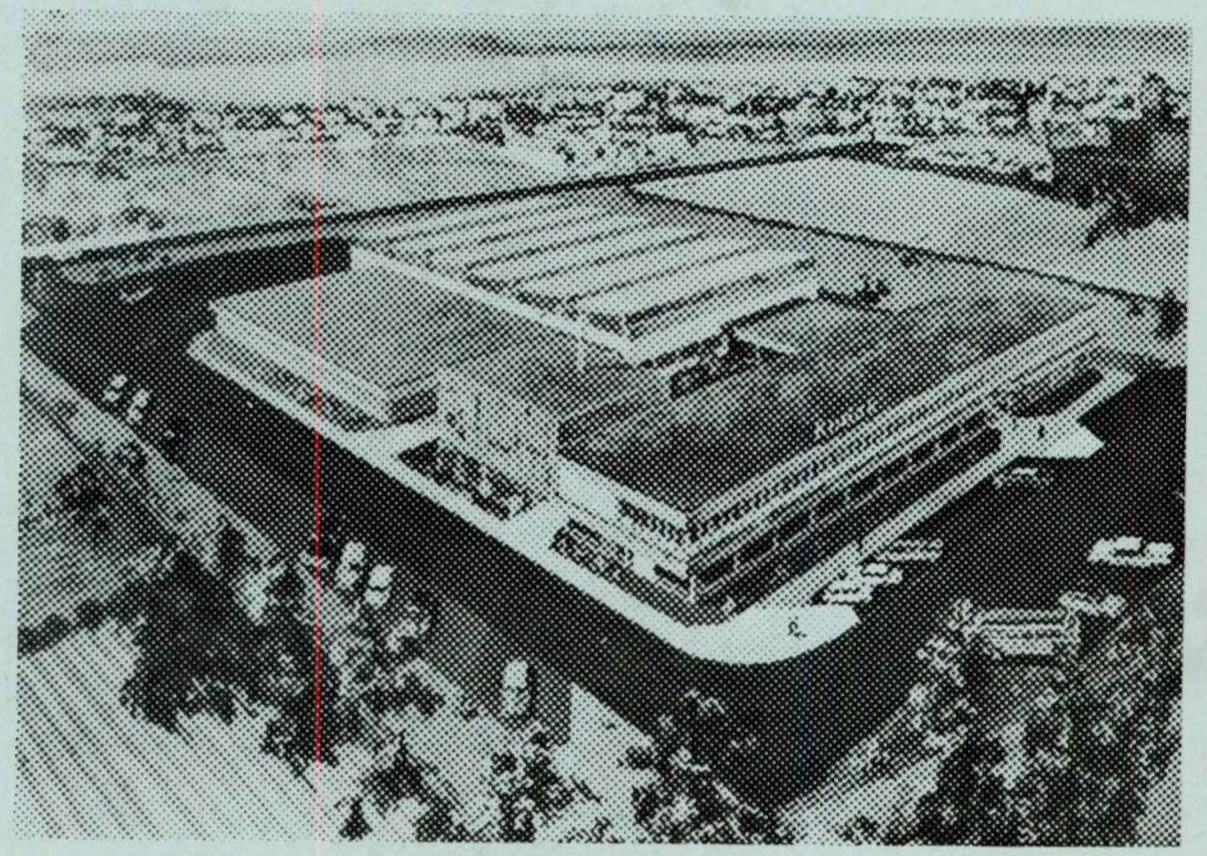
PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA - 2 — TELEFONE

Executou a instalação eléctrica de

— Iluminação
— Sistema de Aquecimento e Ventilação
— Força motriz

do novo edifício da

KODAK PORTUGUESA LTD.



em Linda-a-Velha

Fornecendo e montando também

— Transformador de 800 kVA da nossa representada BRUSH
— Restante equipamento do posto de transformação
— Lâmpadas especiais DURO TEST tons de luz OPTIMA e TURQUESA

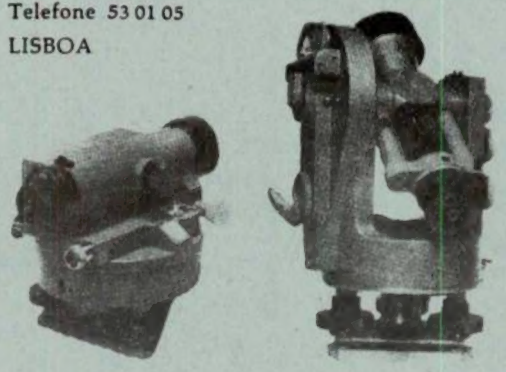
J. F. DE AZEVEDO E SILVA & C.ª, L.DA
Rua S. Francisco de Sales, 2 — Telefone 65 41 65 — Lisboa 1

Miller
Níveis e Teodolitos

Os melhores preços do mercado
Assistência Técnica Garantida

Representante exclusivo:

Nucleon - Equipamentos de Precisão, Lda.
Av. António Augusto de Aguiar, 165, r/c - Dto.
Telefone 53 01 05
LISBOA



FLUIDO MASTIC

Impermeabilização e vedação perfeita de:
Terraços, Empenas, Algerozes, Claraboias, Paredes húmidas, Coberturas, Fendas, Juntas de dilatação, etc. etc.
Fácil aplicação — Elasticidade excepcional
Não endurece nem apodrece

ROOFATEX À BASE DE Borracha + Alumínio

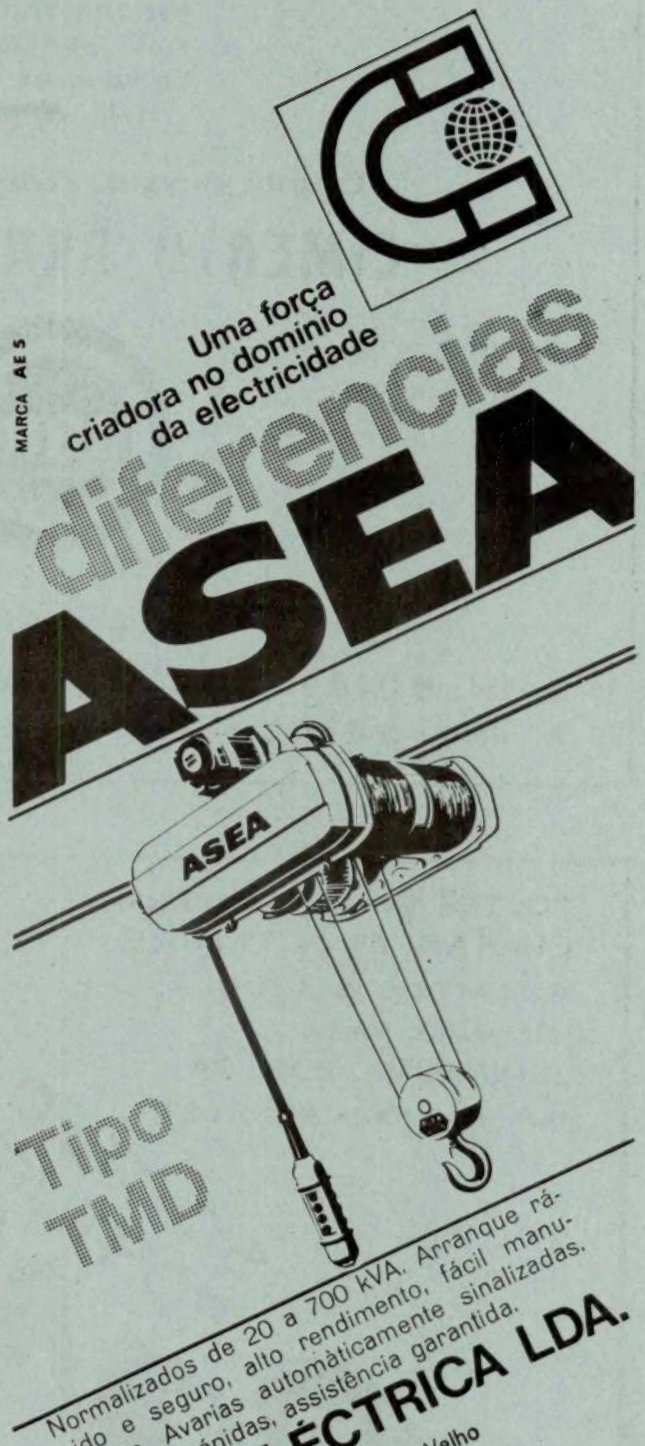
Reforça a acção impermeabilizante do «Rubio», dando às construções um aspecto agradável — Protege todos os materiais contra a humidade, a ferrugem e a corrosão.

RUBIO E ROOFATEX
DOIS PRODUTOS QUE SE COMPLETAM

DEPOSITÁRIOS: LARGO DR. ANTÓNIO DE SOUSA MACEDO, 2 | | **PILOTO & SANTOS, LDA.** TELEF. 67 88 67 LISBOA - 2

Representante Exclusivo: ORF *Orlando Fernandes*

RUA PALMIRA, 46 - A, B, C - LISBOA - 1
TELEFS. 83 01 63 - 84 26 39 - END. TELEG. «ORFER»



Normalizados de 20 a 700 kVA. Arranque rápido e seguro, alto rendimento, fácil manutenção. Avarias automàticamente sinalizadas. Entregas rápidas, assistência garantida.

ASEA ELÉCTRICA LDA.

Estrada do Prior Velho
Tel. 2511101 (5 linhas)
SACAVÉM
R. do Campo Alegre, 144
Tel. 67239
PORTO

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

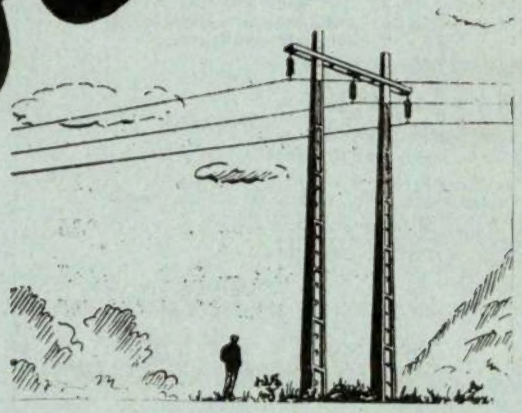
CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA **Carvam**



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1-TELEF. 47812-50129

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO

Aparelhagem de medidas eléctricas

+ indicadora
+ reguladora
+ registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º — LISBOA Tel. 865151

P. do Município, 309-6.º S 3 — PORTO Tel. 0236732

IMPERMEABILIZANTES E ADITIVOS PARA CIMENTO

'PUDLO'

KERNER GREENWOOD & CO., LTD.
KING'S LINN, ENGLAND

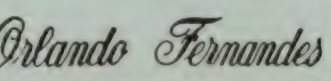
PRODUTOS DA GAMA «PUDLO»:
Impermeabilizante líquido • Impermeabilizante em pó
Impermeabilizante incolor
Acelerador de presa • Tintas impermeabilizantes
Plastificante de argamassas • Endurecedores
Ligante para cimento • Cimento refractário «FEUSOL», etc.

DEPOSITÁRIO GERAL:

PILOTO & SANTOS, LDA.

LARGO DR. ANTÓNIO SOUSA MACEDO, 2
TELEFONE 678867 LISBOA-2

Representante exclusivo em Portugal



RUA PALMIRA (aos Anjos), 46, A, B, C - Telefs. 830163-834879 - LISBOA-1

WABCO

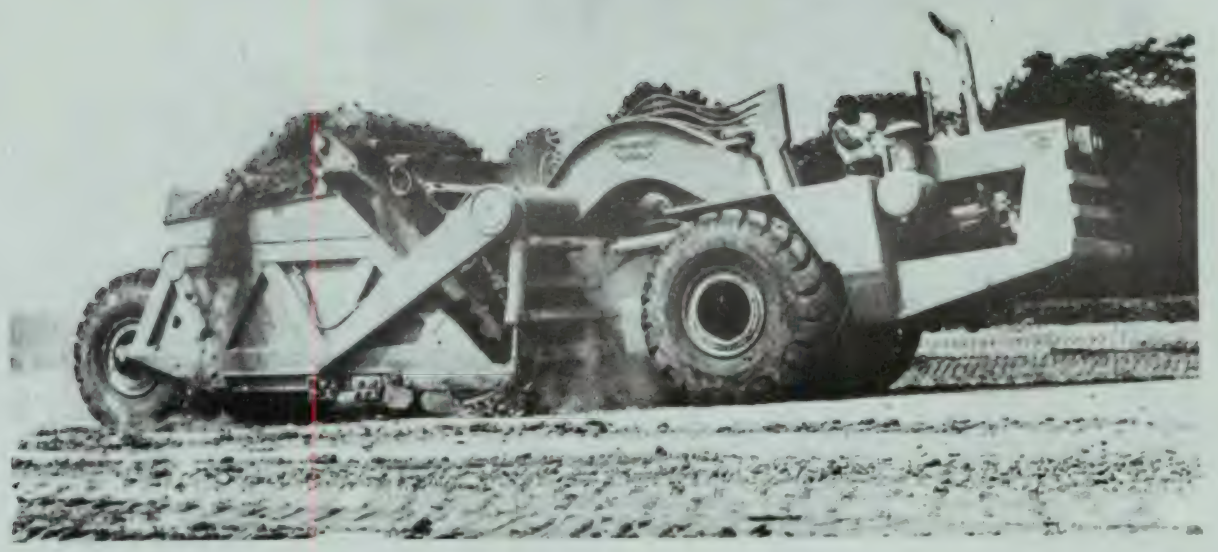
WESTINGHOUSE
AIR BRAKE COMPANY
CONSTRUCTION EQUIPMENT DIVISION
PEORIA ILLINOIS 61601

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!



DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.º — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

A STANDARD ELÉCTRICA PROJECTA-SE NO MUNDO

Na vanguarda da indústria das Telecomunicações e Electrónica, a Standard Eléctrica, dimensionada ao âmbito mundial, ocupa uma prestigiosa posição nos mercados estrangeiros. A eficiência de uma administração actualizada, a capacidade técnica dos seus engenheiros e o profissionalismo com que todos os empregados encaram as suas responsabilidades, são valores reais e positivos que, de maneira decisiva, contribuem para o engrandecimento da Standard Eléctrica e da indústria nacional. Associada da International Telephone and Telegraph Corporation, um conjunto mundial com cerca de 200 fábricas localizadas em mais de 60 paises, a Standard Eléctrica fabrica numerosos produtos, desde os minúsculos transistores e circuitos integrados às grandes centrais telefónicas de serviço público, que são exportados para mais de 30 paises entre os quais se destacam: Inglaterra, França, Alemanha, Espanha, Suécia, Africa do Sul, Brasil e Estados Unidos da América do Norte.

Standard Eléctrica **ITT**

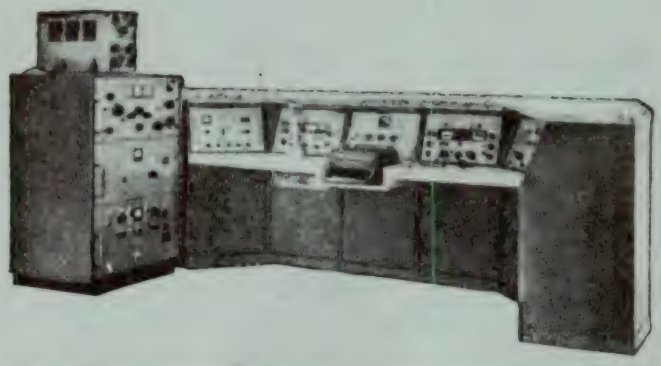
TG

PARA COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA USE:

Também próprio para:
impermeabilizar terrenos,
paredes, fundações, etc.

FÁBRICA EM SACAVÉM

RUA FILIPE FOLQUE-10 1º— LISBOA
TEL.SF. 53 01 56 —TELEG. EPALDA-LISBOA



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

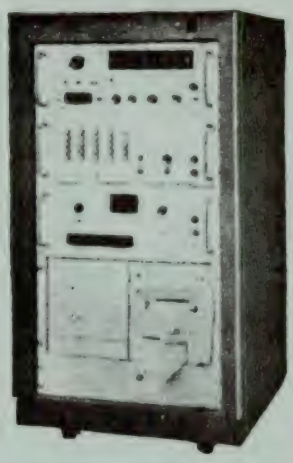
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT **PACKARD**

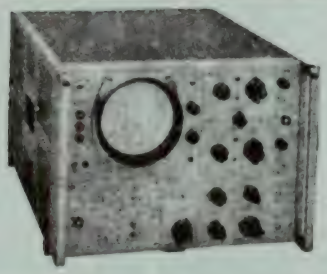
aparelhagem electrónica de medida e registo

Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn



Osciloscópio HP

Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

EQUIPA TODA A INDUSTRIA **DEMAG**

Uma boa escolha ...

Para toda a espécie de material - seja para madeira ou carvão, cascalho ou sucata, minério ou cereais - para qualquer fim há sempre a colher «Demag» indicada. Para aço e ferro os novos electro-imans de carga.

A experiência de décadas garante uma construção perfeita.

Se tem problemas de transporte de cargas consulte-nos. Aconselhar-vos-emos gratuitamente.

ROMAR
UMA ORGANIZAÇÃO AO SERVIÇO DA INDUSTRIA

SOCIEDADE COMERCIAL
ROMAR, LDA.

LISBOA – TRAVESSA DA GALÉ, Nº 9. TEL. 635670 / 634061 • PORTO – R. DE SÁ DA BANDEIRA, Nº 589/603. TEL. 25871/32205

técnica

NUMERO 391 OUTUBRO DE 1969 ANO XLIV VOLUME XXXII PUBLICAÇAO MENSAL

C. D. U.: 518.5:517.52:621.389

ALGORITMO F.F.T. PARA DETERMINAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER — SUA PROGRAMAÇÃO EM FORTRAN

por VÍTOR H. R. DA COSTA FRANÇA
Aluno do I. S. T.
FERNANDO C. NUNES DOS SANTOS
Aluno do I. S. T.
ALEXANDRE G. CERVEIRA
Assistente do I. S. T.
Assistente do C. E. E. da C. E. E. N. do I. A. C.

RESUMO

Além de uma explicação passo por passo da programação, em Fortran, do algoritmo de F.F T. também, se apresentam alguns resultados obtidos com o programa proposto que permitem julgar da excelência do método.

SYNOPSIS

It presents a thoroughly explanation of the Fortran programming for the F.F.T. algorithm. In order to evaluate its performance it still presents some results obtained by the proposed Fortran program.

1. INTRODUÇÃO

Desde há muito que a transformada de Fourier é utilizada para caracterizar os sistemas lineares e para identificar as componentes das várias frequências existentes numa forma de onda contínua. Ao recorrer-se a um computador digital a análise tem que se resumir a um conjunto finito de pontos. É necessário proceder a uma amostragem da forma de onda ou à análise por pontos do sistema linear recorrendo então à versão discreta da transformada de Fourier, que designaremos pelas iniciais D.F.T. («Discrete Fourier Transform») tal como na literatura de língua inglêsa.

O cálculo da transformada discreta de Fourier pode fazer-se através de um algoritmo, conhecido pelas iniciais F.F.T. («Fast Fourier Transform»), cuja eficiência se encontra amplamente discutida na literatura da especialidade, quer em relação ao tempo de cálculo, quer em relação ao erro proveniente dos arredondamentos.

O interesse da transformada de Fourier e, portanto, do algoritmo F.F.T. para a sua determinação é enorme na Análise de Sinais, assunto a que se dedica um dos autores no Centro de Estudos de Electrónica da Comissão de Estudos de Energia Nuclear (Instituto de Alta Cultura). Das aplicações destacam-se a determinação do espectro de potência, a determinação de integrais de Fourier, séries de Fourier e integrais de convolução, a simulação de filtros e a codificação da voz.

Foram estas as razões que levaram à escolha deste assunto para um trabalho que, ao abrigo da rubrica de Actividades do III Plano de Fomento, se destina a estudantes que desejem aperfeiçoar e desenvolver os conhecimentos ministrados na cadeira de «Elementos de Análise Numérica» do Instituto Superior Técnico. Para um melhor apro-

veitamento recorreu-se a estudantes que haviam cursado a cadeira, acima mencionada, no ano lectivo anterior. A utilização de computadores, em geral, e de programação Fortran, em particular, foram os assuntos dados na cadeira e que os estudantes visaram ao colaborar no trabalho e neste artigo.

A programação do algoritimo F. F. T. foi realizada tendo em mente o computador IBM 1620 cuja possibilidade de utilização agradecemos à Companhia IBM Portuguesa e dentro da companhia ao serviço de cálculo científico, pois desta utilização depende em grande parte a realização do objectivo deste trabalho. O programa Fortran obtido, ainda que tendo em vista o tipo e a dimensão do computador à nossa disposição é imediatamente adaptável a computadores de maior capacidade de memória, sujeitos apenas à restrição de utilizarem o Fortran. Além disso, mesmo para o IBM 1620, através de uma subdivisão em vários programas (sequencialmente submetidos ao computador) foi possível estender o algoritmo para um número de pontos superior. Antevê-se mesmo a possibilidade de uma condensação ainda maior do programa que só não se realizou por carência de tempo, uma vez que este trabalho foi realizado ao abrigo do III Plano de Fomento para 1968 e, portanto, de duração limitada.

2. PROGRAMAÇÃO

Na programação de um método de solução de um problema é necessário antes de mais analisar a teoria na qual se baseia o algoritmo em questão. Por isso começaremos por apresentar a teoria do algoritmo F. F. T..

2.1 Teoria do algoritmo F. F. T.

Vamos ver o que vem a ser a D. F. T. de uma função discreta. Sendo T o intervalo em que está definida a função discreta

$$X(t_k) = X_k \quad \text{com} \quad k \varepsilon \{0, 1, 2, \ldots, (N-1)\}$$

cuja transformada discreta de Fourier é

$$V(f_s) = V_s \quad \text{com} \quad s \varepsilon \{0, 1, 2, \ldots, (N-1)\}$$

então verificam-se as seguintes expressões que estabelecem as relações entre os pares de Fourier, no caso discreto,

$$V_s = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(-j\,2\pi ks/N) \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, (N-1) \tag{1}$$

$$X_k = \Delta f \sum_{s=0}^{N-1} V_s \exp(+j\,2\pi sk/N) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, (N-1) \tag{2}$$

em que

$$f_s = s\,\Delta f$$
$$t_k = k\,\Delta t$$
$$\Delta t = T/N$$
$$\Delta f = 1/N$$

Vamos concentrar-nos no cálculo da transformada discreta directa de Fourier, isto é, no cálculo de V_s a partir de X_k. Para maior comodidade utiliza-se $\Delta t = 1$ o que equivale a dizer que o intervalo T, nas unidades que vamos utilizar, mede exactamente N unidades.

Analisemos o caso de N ser par; se fizermos

$$Y_m = X_{2m}$$
$$Z_m = X_{2m+1} \tag{3}$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, \left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

então (1) virá

$$V_s = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(-j2\pi ks/N) =$$
$$= \sum_{m=0}^{N/2-1} \{Y_m \exp(-j4\pi ms\,N) + \tag{4}$$
$$+ Z_m \exp[-j2\pi(2m+1)s\,N]\}$$
$$s = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)$$

ou

$$V_s = \sum_{k=0}^{N/2-1} \{Y_k \exp(-j4\pi ks/N)\} +$$
$$+ \exp(-j2\pi s\,N)$$
$$\sum_{k=0}^{N/2-1} \{Z_k \exp(-j4\pi ks/N)\} \tag{5}$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)$$

Fazendo

$$U_s = \sum_{k=0}^{N/2-1} Y_k \exp(-j4\pi ks/N)$$

$$T_s = \sum_{k=0}^{N/2-1} Z_k \exp(-j4\pi ks/N) \qquad (6)$$

em que s varia entre zero e (N−1), em princípio. Dado que $U_{s+\frac{N}{2}} = U_s$ e $T_{s+\frac{N}{2}} = T_s$ os únicos valores distintos são para $s \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left(\frac{N}{2}-1\right)\right\}$; por esta razão podemos dividir a expressão (5) em duas

$$V_s = U_s + T_s \exp(-j2\pi s/N)$$

$$V_{s+\frac{N}{2}} = U_s + T_s \exp\left[-j2\pi\left(s+\frac{N}{2}\right)/N\right]$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots, \left(\frac{N}{2}-1\right) \qquad (7)$$

Finalmente para simplificar a notação pode escrever-se

$$W(s) = \exp(-j2\pi s/N) \qquad (8)$$

pelo que se obtém

$$V_s = U_s + T_s W(s)$$

$$V_{s+\frac{N}{2}} = U_s - T_s W(s) \qquad (9)$$

$$s \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left(\frac{N}{2}-1\right)\right\}$$

Nisto

$$\exp\left[-j2\pi\left(s+\frac{N}{2}\right)/N\right] = \exp\left(-j2\pi s/N - j2\pi\frac{N}{2N}\right) = \exp(-j2\pi s/N) \quad \exp(-j\pi) =$$

$$= -\exp(-j2\pi s/N) \qquad (10)$$

Ou então também podemos escrever

$$V_s = U_s + T_s W(s)$$

$$V_{s+\frac{N}{2}} = U_s + T_s W\left(s+\frac{N}{2}\right) \qquad (11)$$

com $s \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left(\frac{N}{2}-1\right)\right\}$.

Vamos ver um exemplo para N = 8 em que recorremos na Fig. 1 a uma exposição à base de grafos. Desta figura se conclui que transformámos o cálculo de uma D.F.T. (N = 8) em duas D.F.T. (N = 4) e num conjunto de operações que são expressas pelas equações (11).

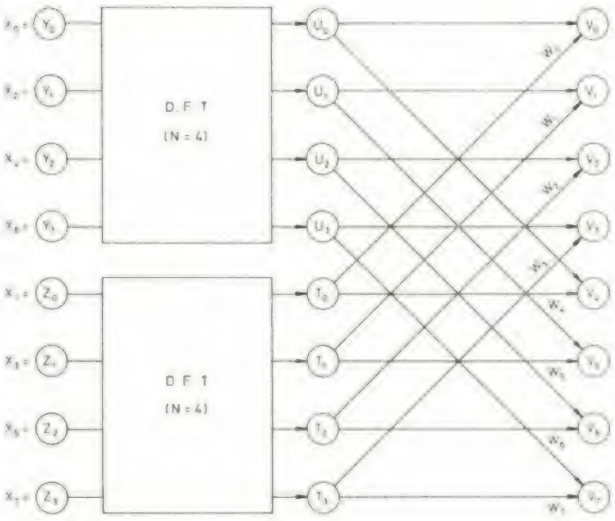


Fig. 1

Observando a expressão (6) conclui-se que existe uma analogia entre U_s e T_s e comparando as expressões (5) e (6) verifica-se uma semelhança daqueles com V_s. Se existir um número par de valores de U_s e de T_s aquela semelhança vai-nos permitir simplificar o cálculo uma vez que U_s e T_s são transformadas discretas de Fourier (neste caso dos Y e dos Z). Quer dizer que podemos repetir para U_s e para T_s as operações efectuadas anteriormente sobre V_s. Nesse caso U_s e T_s obter-se-ão pelas expressões

$$U_s = R_s + S_s W(2s)$$

$$U_{s+\frac{N}{4}} = R_s + S_s W\left[2\left(s+\frac{N}{4}\right)\right]$$

$$T_s = P_s + Q_s W(2s) \qquad (12)$$

$$T_{s+\frac{N}{4}} = P_s + Q_s W\left[2\left(s+\frac{N}{4}\right)\right]$$

$$s \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left(\frac{N}{4}-1\right)\right\}$$

Se for possível proceder sucessivamente de igual modo chegaremos ao cálculo de um conjunto

de transformadas de Fourier para ($N = 2$) para as quais os valores que entram nos cálculos são os próprios X_k (valores da função dada). A possibilidade de subdividir sucessivamente por 2 os grupos de valores obtidos exige que N (número total de valores dados) seja *potência inteira e positiva de* 2.

Outros algoritmos F. F. T. podem basear-se em potências de 3, 5 ou outro número primo qualquer; todavia o cálculo simultâneamente mais simples e económico é aquele em que N é potência de 2. O algoritmo F. F. T. é ainda aplicável quando N for um produto de vários factores primos mas então não existe uma repetição do cálculo, mas simplesmente uma repetição de conceitos ao longo do cálculo, pelo que este se torna muito mais complicado. Se N for um número primo o algoritmo F. F. T. e o cálculo directo coincidem.

Em geral escolhe-se N potência de 2 pela simplicidade que traz ao algoritmo e à sua programação e é essa também a nossa atitude. No caso de ($N = 8$) o conjunto das transformações pode esquematizar-se no grafo da Fig. 2.

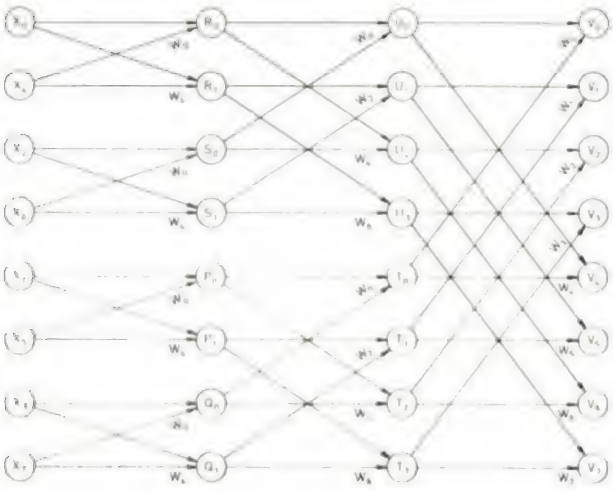


Fig. 2

Podemos fazer uma extensão das expressões (9) para o cálculo total de uma F. F. T. com $N = 2^{KK}$ tendo em consideração o grafo da Fig. 2 e indicando pela variável i as colunas (a partir da direita). Resultará

$$V_r(i-1) = V_u(i) + V_v(i)\, W(s\, 2^{i-2})$$
$$V_{r+\theta}(i-1) = V_u(i) - V_v(i)\, W(s\, 2^{i-2}) \qquad (13)$$

sendo $V_r(i)$ o valor que ocupa a coluna i e a linha r no grafo correspondente ao da Fig. 2. Deve-se ter

$$\theta = \frac{N}{2^{i-1}}$$

$$KK = \log_2 N$$
$$i \varepsilon \{2, 3, 4, \ldots, (KK+1)\}$$
$$r \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, \theta\}$$
$$s = r - 1$$
$$u = r$$
$$v = r + \theta$$

Esta variação de r só é válida para uma parte dos N valores que é necessário calcular em cada coluna de valores. Assim na coluna de índice i necessitamos de 2^{i-2} variações de r cuja forma geral será

$$r \varepsilon \{2(k-1)\theta + 1, 2(k-1)\theta + 2, \ldots, (2k-1)\theta\}$$

com $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, 2^{i-2}\}$. O índice r utilizado nestas expressões tem uma variação que começa com a unidade, o que é vantajoso pois também em Fortran os índices começam com a unidade, não podendo começar em zero tal como acontecia com o índice s.

Por conveniência futura vamos indicar as colunas de valores a calcular pelo índice j que, contràriamente ao índice i, cresce da esquerda para a direita e definir uma nova variável $A_r(j) = V_r(KK - j + 2)$. Então as expressões (13) podem reduzir-se a

$$A_r(j) = A_u(j-1) + A_v(j-1)\; W(s\, 2^{KK-j})$$

$$j \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, KK\}$$
$$k \varepsilon \left\{1, 2, 3, \ldots, \frac{N}{2^j}\right\}$$
$$L \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, 2^j\} \qquad (14)$$
$$s = L - 1$$
$$r = (k-1)\, 2^j + L$$

$$\begin{cases} L < 2^{j-1} \implies \begin{cases} u = r \\ v = r + 2^{j-1} \end{cases} \\ L \geqslant 2^{j-1} \implies \begin{cases} u = r - 2^{j-1} \\ v = r \end{cases} \end{cases}$$

As expressões acima são a base do algoritmo F.F.T. pelo que encerramos as considerações de ordem teórica.

2.2 Execução da programação

Uma vez indicada a estrutura teórica do algoritmo vamos delinear o programa.

Pretende-se um programa que aceite dados em número variável com as restrições de ser potência de 2 e de ser inferior a um determinado número imposto pela dimensão da memória do computador a usar.

No programa que nos propomos fazer, quer os dados, quer os resultados e, portanto, todos os valores intermédios do cálculo são números complexos. Possuem parte real e parte imaginária que em Fortran identificaremos por um índice: 1 para a parte real e 2 para a parte imaginária. Todas as quantidades acima referidas serão, pois, variáveis indexadas (ou dimensionadas) em Fortran.

Para se compreender as preocupações a que a seguir nos vamos referir será conveniente afirmar que as transformadas discretas de Fourier para serem de marcada utilidade devem poder utilizar um grande número de pontos. Será, pois, compreensível que se procure um programa económico em ocupação de memória do computador para que a restante parte da memória possa ser utilizada no sentido de aumentar o número de pontos iniciais do algoritmo F. F. T..

Ora, em princípio, com $N = 2^{KK}$ é necessário calcular sucessivamente $KK + 1$ conjuntos de N valores que já sabemos serem complexos e que ocupariam $2\,N\,(KK + 1)$ posições de memória. Como, porém, os cálculos indicados pela expressão (14) se efectuam entre um conjunto de valores e aquele que se lhe segue é possível reduzir os $KK + 1$ conjuntos de valores a 2 conjuntos de N valores complexos. Ocupam desta feita 4 N posições de memória o que representa uma economia importante na ocupação da memória do computador.

Iremos identificar estes dois conjuntos de valores, em Fortran, pelas variáveis indexadas A e X e atribui-se a A os valores do 1.º, do 3.º, do 5.º, etc., conjunto de valores e a X os valores do 2.º, do 4.º, do 6.º, etc. conjunto de valores. Logo calcula-se X a partir de A e depois A a partir de X e assim sucessivamente até atingirmos o conjunto de valores finais que será A ou X conforme KK seja par ou ímpar, respectivamente.

Para identificar cada valor dentro do conjunto representado por A ou por X vamos utilizar um primeiro índice que irá de 1 a N para além do segundo índice que identifica a parte real e a parte imaginária. Assim teremos

$$A(I, K) \quad \text{ou} \quad X(I, K)$$

com

$$I \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$$
$$K \in \{1, 2\}$$

O valor de $W(s\,2^{KK-j})$ também é um valor complexo que representaremos, em Fortran, pela variável indexada W, cujo índice identifica se se trata da parte real ou da parte imaginária. Como a expressão de $W(s\,2^{KK-j})$ é dada por (8) a fórmula de Euler permite determinar como parte real e como parte imaginária, respectivamente, (*)

$$W(1) \longleftrightarrow \cos(-2\,\pi\,s\,2^{KK-j}/N)$$
$$W(2) \longleftrightarrow \sin(-2\,\pi\,s\,2^{KK-j}/N)$$

Como vimos, a obtenção dos resultados pela ordem natural exige que os dados sejam ordenados de uma forma especial. Esta ordenação será efectuada do conjunto X para o conjunto A, com economia de 2 N posições de memória, pois, não é necessário um novo conjunto para os dados iniciais. Desta forma o conjunto X é que recebe os dados iniciais a introduzir no computador como representando os pontos da função a transformar pelo algoritmo de F. F. T..

Como hipótese vamos estabelecer a forma como são introduzidos no computador o valor de N e os valores do conjunto X. N será introduzido através de um cartão perfurado e obedecendo ao formato (I 4); para o conjunto X utilizaremos cartões perfurados que se encontram por ordem e em que existe um ponto em cada

(*) Utilizaremos o símbolo $\longleftrightarrow$ para indicar a equivalência entre expressões ou variáveis, em linguagem Fortran, e as expressões ou variáveis, em linguagem usual

cartão (1.° a parte real e depois a parte imaginária) segundo o formato (6 X, E 14. 8, 1 X, E 14. 8).

Também estabeleceremos desde já o aspecto da saída dos resultados: por impressão numa folha de papel, em forma de tabela que indique um índice de ordem do argumento, a parte real e a parte imaginária da transformada. O formato a utilizar deve ser (5 X, I 5, 10 X, E 12. 6, 10 X, E 12. 6) e a tabela deve ser antecedida pela captação

```
J1        REAL        IMAGINARIA
```

segundo o formato (///7 X, 2 H J1, 15 X, 4 H REAL, 15 X, 10 H IMAGINARIA /).

Para indicar ao compilador Fortran que o programa está terminado colocar-se-á em último lugar a instrução END.

Dado que o computador IBM 1620 posto à nossa disposição para o trabalho tem uma capacidade limitada (20 K) o número de pontos máximo não pode exceder 128, uma vez que tem de ser potência de 2. Assim podemos escrever a instrução de especificação

```
DIMENSION A (128,2), X (128,2), W (2)
```

que indica a dimensão máxima das variáveis indexadas que entram no programa: A, X, W.

Caso este programa se queira utilizar noutro computador 'com maior capacidade de memória basta alterar a instrução DIMENSION indicando em vez do número 128 a potência de 2 que essa capacidade permitir.

A elaboração do pormenor do programa vai ser apresentado separado em várias fases.

2.2.1

Nesta primeira fase analisar-se-á a introdução dos dados. Os dados a introduzir são o valor de N (número total de pontos dados) e os valores da parte real e da parte imaginária de cada um desses pontos. Como se utilizam cartões perfurados teremos em Fortran

```
999 READ 11, N
    DO 12 I = 1, N
 12 READ 13, X (I,1), X (I,2)
```

em que se recorreu a um método iterativo para a leitura dos valores da parte real e da parte imaginária que existem em cada cartão.

2.2.2

Se examinarmos a Fig. 2 verificamos que, para obtermos a transformada de uma função dada por N pontos $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_N$ de modo a que os resultados venham segundo a ordem natural, é necessário dar uma ordenação especial aos dados. Nesta segunda fase discutiremos a execução do programa relativa à ordenação dos dados.

Da análise da expressão (3) conclui-se que agrupámos os valores de índice par no conjunto dos U e os de índice ímpar no conjunto dos T. Se os colocarmos, tal como no grafo da Fig. 2, o conjunto dos U é seguido do conjunto dos T. No passo anterior é necessário operar em cada metade como anteriormente, isto é, separando os pares dos ímpares e colocando aqueles antes destes.

Vamos agora supor que o índice de ordem dos valores V_s se encontra escrito na forma binária, isto é,

$$s = (b_{KK-1}, b_{KK-2}, \ldots, b_1, b_0) = \\ = b_{KK-1}\, 2^{KK-1} + b_{KK-2}\, 2^{KK-2} + \ldots + \\ + b_1\, 2 + b_0 \qquad (16)$$

em que para $\forall\, i \in \{0, 1, 2, \ldots, (KK-1)\}$ se tem $b_i \in \{0, 1\}$.

Repare-se que a divisão em índices pares e índices ímpares, se pode fazer atendendo que em escrita binária os primeiros têm $b_0 = 0$ e os segundos têm $b_0 = 1$. Ao fazer-se o mesmo em relação a cada um dos grupos assim obtidos separam-se os valores que têm $b_1 = 0$ dos que têm $b_1 = 1$, isto é, tendo em atenção o segundo símbolo a contar da direita. E dentro de cada grupo colocam-se em primeiro lugar aqueles em que $b_1 = 0$. Depois, separar-se-iam os que têm $b_2 = 0$ daqueles em que $b_2 = 1$ e assim sucessivamente.

Pode concluir-se que os valores iniciais se encontram na posição que corresponde a escrever o valor do índice em escrita binária e a inverter a ordem dos algarismos binários.

Há, pelo menos, duas formas possíveis de proceder a esta ordenação.

A primeira corresponde a tomar o valor de ordem da posição a preencher, escrevê-lo em

notação binária, inverter a ordem dos símbolos binários e determinar o valor que lhe corresponde; este valor indica o índice. Se tal como em Fortran os índices e as ordens começarem pela unidade e não por zero teríamos para $N = 8$ o seguinte esquema:

$$
\begin{array}{llll}
J=1 & j=0 & j=(000) \Longrightarrow & i=(000)\ i=0\ I=0 \\
J=2 & j=1 & j=(001) \Longrightarrow & i=(100)\ i=4\ I=5 \\
J=3 & j=2 & j=(010) \Longrightarrow & i=(010)\ i=2\ I=3 \\
J=4 & j=3 & j=(011) \Longrightarrow & i=(110)\ i=6\ I=7 \\
J=5 & j=4 & j=(100) \Longrightarrow & i=(001)\ i=1\ I=2 \\
J=6 & j=5 & j=(101) \Longrightarrow & i=(101)\ i=5\ I=6 \\
J=7 & j=6 & j=(110) \Longrightarrow & i=(011)\ i=3\ I=4 \\
J=8 & j=7 & j=(111) \Longrightarrow & i=(111)\ i=7\ I=8
\end{array}
\tag{17}
$$

A segunda forma é através de um método de recorrência que determina o índice i_j para a posição de uma dada ordem j a partir do índice i_{j-1} conhecido para a posição de ordem imediatamente anterior $j-1$; será necessário determinar φ tal que

$$i_j = i_{j-1} + \varphi \tag{18}$$

É este caminho que seguiremos, tanto mais que φ só depende, quando j se encontra em escrita binária, da posição do primeiro algarismo diferente de zero (a partir da direita). Pode verificar-se que o número de zeros que antecede este primeiro algarismo diferente de zero varia entre zero e $KK - 2$.

Tal como já fizemos vamos designar por J a ordem da posição a preencher e por I o índice que lhe corresponde, tanto mais que estas designações correspondem exactamente às que utilizaremos no programa Fortran.

Como se trata de um método de recorrência é necessário indicar as condições iniciais que neste caso se resumem a afirmar qual é o índice que corresponde à primeira posição $J = 1$; do que foi dito se conclui que o índice é 1

$$i_1 = 1 \tag{19}$$

Em Fortran resulta

```
I = 1
A (1,1) = X (1,1)
A (1,2) = X (1,2)
```

A partir da posição de ordem 2 até à posição de ordem N vai repetir-se um conjunto de operações que em Fortran sabemos poder indicar através de uma instrução

```
DO 2 J = 2,N
```

As operações de que falámos acima compreendem, em primeiro lugar, uma verificação referente à ordem J em que se procura saber qual a potência de 2 de que $j = J - 1$ é um múltiplo ímpar. Desta forma identificamos a posição do primeiro algarismo diferente de zero, a contar da direita, existente na escrita binária de j.

Com esse fim faz-se a variável K2 percorrer as potências de 2 com início em 2^1

```
  KK = 1
1 K 2 = 2. ** KK + .01
```

então $\frac{K2}{2}$ também percorre as potências de 2, mas agora com início em 2^0. Se designarmos por L (tal como em Fortran) a diferença entre $(J - 1)$ e $(2\ KA - 1)\ \frac{K2}{2}$ vamos verificar se L se torna igual a zero quando $2\ KA - 1$ percorre os números ímpares. Enquanto L for positivo é necessário passar ao número ímpar seguinte, mas se L se tornar negativo sem passar por zero, então $J - 1$ não é múltiplo ímpar dessa potência de 2 e passa-se à potência seguinte recomeçando com $KA = 1$.

```
  M1 = N/K2 + 1
  DO 3 KA = 1,M1
  L = J - K2*KA + K2/2 - 1
  IF (L) 5,4,3
3 CONTINUE
5 KK = KK + 1
  GO TO 1
4 ..........
```

Se verificarmos que $J - 1$ é múltiplo ímpar da potência de 2 dada por $\frac{K2}{2}$, então sabe-se que após a inversão da notação binária se tem um conjunto de algarismos binários zero à esquerda, em que o primeiro algarismo diferente de zero a partir da esquerda é dado por $\frac{N}{2}$ a dividir por

$\frac{K2}{2}$, ou seja $\frac{N}{K2}$.

Consideremos, agora, a ordem da posição precedente $j-1$; quando em escrita binária, possui, a partir da direita, algarimos 1 onde j possui algarismos 0 e um algarismo zero na posição correspondente ao primeiro algarismo 1 a partir da direita em j. À esquerda deste algarismo ambas as escritas binárias coincidem. Após a inversão da notação binária para ambos os valores, a diferença será fácil de obter:

$$i_j - i_{j-1} = \frac{N}{K2} - 2\frac{N}{K2} - 2^2\frac{N}{K2} - \\ - \ldots - 2^b\frac{N}{K2} \qquad (20)$$

em que $2^{b+1} = K2$ e, portanto $2^b\frac{N}{K2} = \frac{N}{2}$.

Abreviando pode-se escrever

$$i_j - i_{j-1} = a_1 - a_2 \qquad (21)$$

em que

$$a_1 = \frac{N}{K2}$$

$$a_2 = 2\frac{N}{K2} + 2^2\frac{N}{K2} + \ldots + \frac{N}{2} \qquad (22)$$

Como a_2 é a soma de uma progressão geométrica de razão 2, então

$$a_2 = \frac{2\frac{N}{K2} - 2\frac{N}{2}}{1-2} = N - 2\frac{N}{K2} \qquad (23)$$

Incluindo este resultado na expressão (21) obtém-se

$$i_j = i_{j-1} + \frac{N}{K2} - N + 2\frac{N}{K2} = \\ = i_{j-1} - (K2 - 3)\frac{N}{K2} \qquad (24)$$

ou em Fortran, em que designamos por I qualquer dos i_j

```
4 I = I - (K2 - 3) * (N/K2)
```

Determinado o índice I que corresponde à posição J resta indicar a arrumação dos valores iniciais X no conjunto A

```
  A (J,2) = X (I,2)
2 A (J,1) = X (I,1)
```

Quando estas operações forem realizadas para todos os valores de J desde 2 até N tal como está indicado na instrução DO 2 J = 2,N, então os valores iniciais encontram-se ordenados no conjunto A conforme convém para prosseguir a aplicação do algoritmo F. F. T..

2.2.3

É altura de passar às transformações expressas em (14). Em primeiro lugar é necessário determinar KK o que em Fortran é realizado através das instruções

```
XN = N
KK = LOG (XN)/LOG (2.) + 0.01
```

A forma como foi delineado o programa leva-nos a introduzir uma função indicatriz para diferenciar se se está a calcular o conjunto A a partir de X ou o conjunto X a partir de A. Se em Fortran designarmos a função indicatriz por IND então assentamos que IND = 1 indica que estamos a calcular X a partir de A e que IND = 2 indica que se está a calcular A a partir de X. Como já foi dito, o primeiro cálculo é feito de A para X, logo deve estabelecer-se inicialmente

```
IND = 1
```

Como em (14) se indica que $j \in \{1, 2, 3, \ldots, KK\}$ é necessário recorrer a uma instrução Fortran que itere os cálculos. Sendo $J \longleftrightarrow j$ então vem

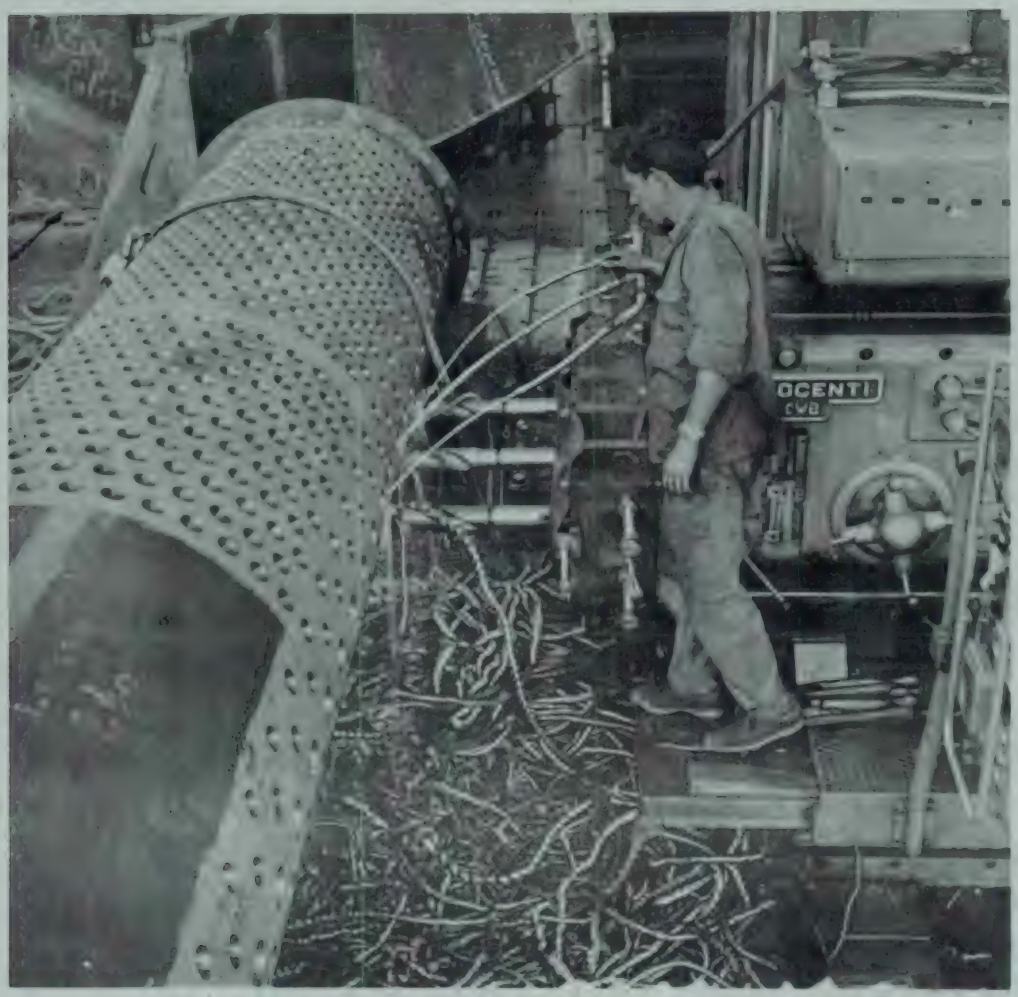
```
DO 70 J = 1, KK
```

O valor 2^j entra em (14); vamos designá-lo por K2 em Fortran, isto é,

```
K2 = 2.** J + 0.01
```

Vamos admitir que se calculam as partes reais em primeiro lugar e depois se repete tudo para

MAGUE

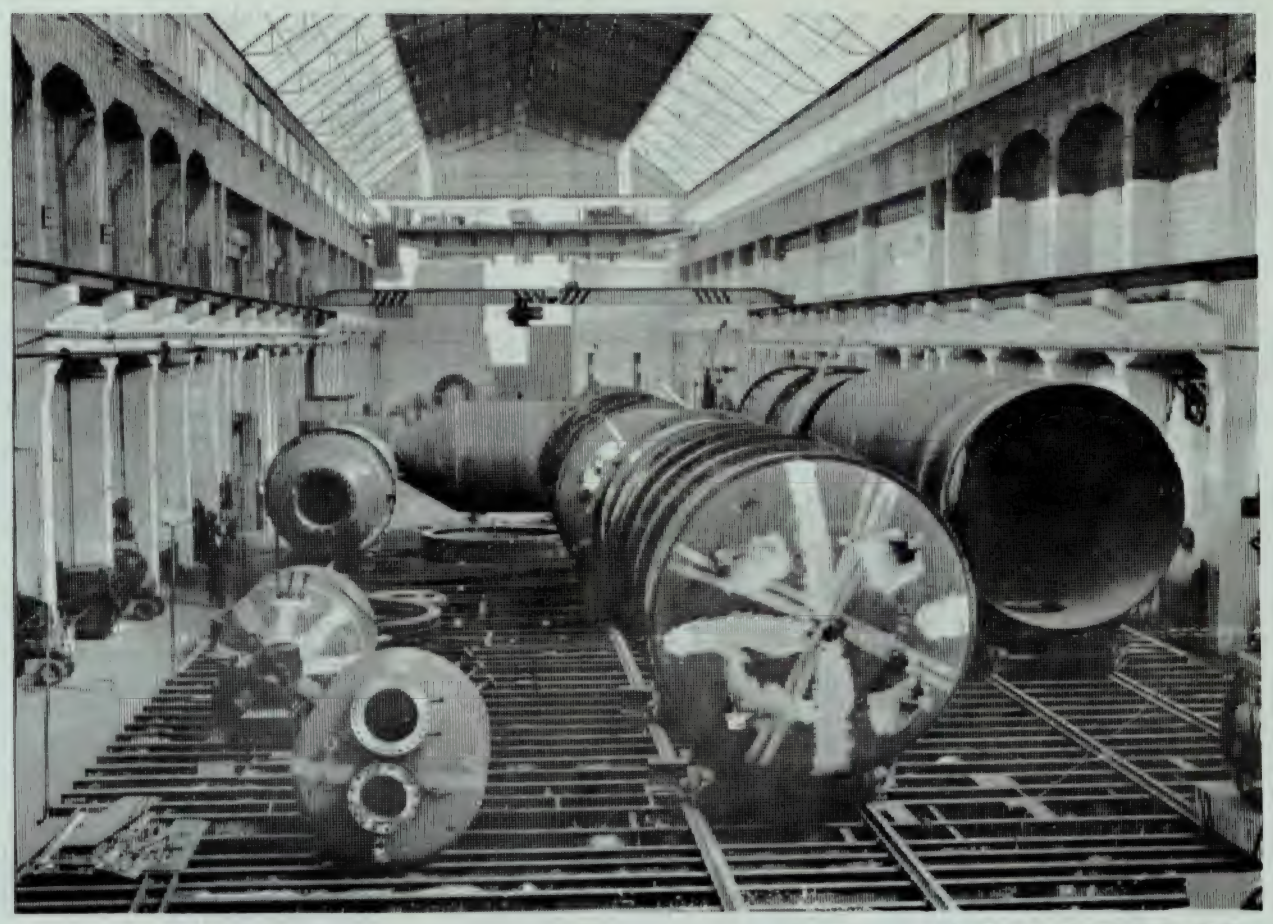


"Furação de barrilete com cabeça de furar tripla, com variação contínua de entre eixos, para uma das Caldeiras da Central da Refinaria do Norte (Sacor)

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL



SEPSA - Instalações fabris, Leça do Bailio.
Vista parcial da Nave de Caldeiraria Pesada.

- **ALTERNADORES** (de potência superior a 2000 kVA), **COMPENSADORES SÍNCRONOS, MOTORES DE GRANDE POTÊNCIA** (fabricação parcial).
- **EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS QUÍMICAS E PETROQUÍMICAS**
  Tubagens, tremonhas, reactores, permutadores, cisternas, etc.
- **EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS PETROLÍFERAS**
  Torres, balões, permutadores, filtros, aerorefrigerantes, tubagens, etc.
- **EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS CIMENTEIRAS**
  Fornos, moinhos, separadores, arrefecedores, etc.
- **RESERVATÓRIOS**
  De tecto fixo e tecto flutuante, de alta e baixa pressão. Para gases liquefeitos. Gasómetros
- **EQUIPAMENTOS DE MANUTENÇÃO E TRANSPORTE**
  Elevadores de alcatruzes, elevadores de palhetas, transportadores de tela metálica e de borracha, contentores, etc.
- **ESTRUTURAS METÁLICAS**
  Pontes, cimbres, coberturas, pisos, edifícios industriais, etc.
- **MONTAGENS PESADAS**

SEPSA SOCIEDADE DE CONSTRUÇÕES ELECTRO-MECÂNICAS, S.A.R.L.
APARTADO 8 • LEÇA do BAILIO • TELEX SEPSA P 2616

o cálculo das partes imaginárias, ò que em Fortran pode ser indicado por

```
DO 80 KA = 1, 2
```

sendo KA o índice que diferencia na representação de números complexos a parte real da parte imaginária.

Outro valor que intervém nas expressões (14) é o de $\frac{N}{2^j}$ que vamos designar em Fortran por M1

```
M1 = N/K2
```

de tal forma que as variações dos índices k e L em (14) se podem escrever como

```
DO 80 I = 1, M1
DO 80 L = 1, K2
```

se for $I \longleftrightarrow k$ e $L \longleftrightarrow L$. Se $J1 \longleftrightarrow r$ então a expressão $r = (k-1)\ 2^j + L$ apresenta-se como

```
J1 = K2*I - K2 + L
```

Ainda de (14) se conclui que u e v só se definem depois de verificar se $L < 2^{j-1}$ ou $L > 2^{j-1}$. Sendo $u \longleftrightarrow J2$ $v \longleftrightarrow J3$ obtém-se

```
   IF (L - K2/2) 91, 91, 92
91 J2 = J1
   J3 = J1 + K2/2
   GOTO 93
92 J2 = J1 - K2/2
   J3 = J1
93 .........
```

Em (14) exige-se ainda o conhecimento de $W(s\ 2^{KK-j})$. No cálculo do argumento sabemos que $s = L - 1$ e que $2^{KK-j} = \frac{N}{2^j}$. Conjuntamente com (15) é possível escrever

```
93 B1 = (L - 1) * (N/K2)
   B1 = - 2. * 3.1415926 * B1/XN
   W(1) = COS (B1)
   W(2 = SIN (B1)
```

O problema que temos a resolver agora é o da expressão principal em (14) que sendo complexa tem que se desdobrar. A forma da expressão é

$$(d_1, d_2) = (c_1, c_2) + (a_1, a_2) . (b_1, b_2) \quad (25)$$

e, portanto, por separação da parte real e da parte imaginária

$$d_1 = c_1 + a_1 . b_1 - a_2 . b_2$$
$$d_2 = c_2 + a_1 . b_2 + a_2 . b_1 \quad (26)$$

Verifica-se que o cálculo da parte real e da parte imaginária diferem no que diz respeito ao sinal da última parcela e à posição de b_1 e b_2.

Se quando for KA = 1 se tiver K1 = 2 e $a = +a_2$ e quando KA = 2 se tiver K1 = 1 e $a = -a_2$, então as expressões de (26) resumem-se a

$$d_{KA} = c_{KA} + a_1 . b_{KA} - a . b_{K1} \quad (27)$$

o que corresponde, em Fortran, a fazer

```
   GO TO(81,82),KA
81 K1 = 2
   XX = X(J3,2)
   AA = A(J3,2)
   GO TO 88
82 K1 = 1
   AA = - A(J3,2)
   XX = - X(J3,2)
88 GO TO(94,95), IND
94 X(J1,KA) = A(J2,KA) + A(J3,1)*W KA)-
                                - AA*W(K1)
   GO TO 80
95 A(J1,KA) = X(J2,KA) + X(J3,1)*W(KA)-
                                - XX*W(K1)
80 CONTINUE
```

em que não se esqueceu de indicar pela instrução GO TO (94,95), IND se se trata de calcular A a partir de X ou vice-versa.

Após o cálculo de todos os valores de A ou de X é necessário trocar o valor da função indicatriz o que se consegue por

```
   GO TO(96,97), IND
96 IND = 2
   GO TO 70
97 IND = 1
70 CONTINUE
```

Como as instruções de iteração fazem com que todos os valores de interesse de J, I, L e KA sejam considerados o programa nesta parte está terminado.

2.2.4

Vamos nesta fase tratar da saída dos resultados. Começaremos pela saída da captação da tabela; na instrução Fortran, como não há variáveis a indicar, basta escrever

```
PRINT 400
```

A tabela pròpriamente dita deve ser dos valores de A ou dos valores de X, conforme KK seja par ou ímpar, o que se pode determinar pelo valor da função indicatriz IND. A tabulação dos valores corresponde a uma iteração e, portanto,

```
      GO TO (98, 99), IND
   98 DO 110 J1=1,N
  110 PRINT 300, J1, A (J1,1), A (J1,2)
      GO TO 999
   99 DO 120 J1=1,N
  120 PRINT 300, J1, X (J1,1), X (J1,2)
      GO TO 999
```

com que termina o programa. Verifica-se que pelas instruções GO TO 999 se teve em mente a possibilidade de utilizar este programa repetidamente: após a saída dos resultados o computador pode receber novos dados.

Esta é a última fase do programa o qual se encontra completo na Fig. 3.

2.3 Adaptação para N = 256

O problema que se enfrenta é a falta de capacidade de memória para executar o programa anterior para o valor de N imediatamente a seguir: $2^8 = 256$.

Nesta adaptação a principal alteração em relação ao programa da Fig. 3 foi a divisão do programa em dois. No primeiro é feita a entrada dos dados e a sua ordenação. O segundo programa refere-se às transformações expressas em (14) e à saída de resultados. É introduzido na máquina sem se limpar a memória de modo a que os resultados do primeiro programa sejam aproveitados como dados para a execução do segundo. Isto consegue-se dando uma instrução DIMENSION precisamente igual à do primeiro programa; assim as posições de memória ocupadas pelos resultados do primeiro programa vão ser as posições de memória designadas para os dados do segundo programa.

Outra alteração consistiu em substituir a variável N pela constante 256 e assim o número KK passa a ser constante e igual a 8, o que permite excluir a subrotina LOG ( ) que ocupa 568 dígitos.

Ainda para poupar capacidade de memória, embora aumentando o tempo de cálculo, passou a haver apenas uma expressão que calcula X a partir de A, sendo em seguida passados de X para A todos os valores, de modo a no passo seguinte ser novamente calculado X a partir de A. Como consequência, passou a haver um único ciclo de saída de resultados e deixou de ser necessária a variável IND em todo o programa.

```
-6600          DIMENSION A(128,2),X(128,2),W(2)
-6600      999 READ 11,N
-6624       11 FORMAT(I4)
-6646          DO12 I=1,N
-6658       12 READ 13,X(I,1),X(I,2)
-6778       13 FORMAT(6X,E14.8,1X,E14.8)
-6820  C       ORDENACAO DE DADOS
-6920          I=1
-6932          A(1,1)=X(1,1)
-6944          A(1,2)=X(1,2)
-6956          DO 2 J=2,N
-6968          KK=1
-6980        1 K2=2.**KK+.01
-6940          M1=N/K2+1
-6988          DO 3 KA=1,M1
-7000          L=J-K2*KA+K2/2-1
-7108          IF (L) 5,4,3
-7164        3 CONTINUE
-7200        5 KK=KK+1
-7236          GO TO 1
-7244        4 I=I-(K2-3)*(N/K2)
-7352          A(J,2)=X(I,2)
-7424        2 A(J,1)=X(I,1)
-7532  C       CALCULO DAS TRANSFORMACOES
-7532          XN=N
-7568          KK=LOG(XN)/LOG(2.)+0.01
-7652          IND=1
-7664          DO 70 J=1,KK
-7676          K2=2.**J+0.01
-7736          DO 80 KA=1,2
-7748          M1=N/K2
-7784          DO 80 I=1,M1
-7796          DO 80 L=1,K2
-7808          J1=K2*I-K2+L
-7868          IF (L-K2/2) 91,91,92
-7960       91 J2=J1
-7972          J3=J1+K2/2
```

```
-8020          GO TO 93
-8028       92 J2=J1-K2/2
-8088          J3=J1
-9100       93 B1=(L-1)*(N/K2)
-8196          B1=-2.*3.1415926*B1/XN
-8268          W(1)=COS(B1)
-8292          W(2)=SIN(B1)
-8316          GO TO (81,82),KA
-8392       81 K1=2
-8404          XX= X(J3,2)
-8440          AA= A(J3,2)
-8476          GO TO 88
-8484       82 K1=1
-8496          AA=-A(J3,2)
-8556          XX=-X(J3,2)
-8616       88 GO TO (94,95),IND
-8692       94 X(J1,KA)=A(J2,KA)+A(J3,1)*W(KA)-AA*W(K1)
-8992          GO TO 80
-9000       95 A(J1,KA)=X(J2,KA)+X(J3,1)*W(KA)-XX*W(K1)
-9300       80 CONTINUE
-9408          GO TO (96,97),IND
-9484       96 IND=2
-9496          GO TO 70
-9504       97 IND=1
-9516       70 CONTINUE
-9552          PRINT 400
-9564      400 FORMAT(///7X,2HJ1,15X,4HREAL,15X,10HIMAGINARIA/)
-9676          GO TO (98,99),IND
-9752       98 DO 110 J1=1,N
-9764      110 PRINT 300,J1,A(J1,1),A(J1,2)
-9896          GO TO 999
-9904       99 DO 120 J1=1,N
-9916      120 PRINT 300,J1,X(J1,1),X(J1,2)
J0048          GO TO 999
J0056      300 FORMAT(5X,I5,10X,E12.6,10X,E12.6)
J0110          END
PROCESSING COMPLETE
```

Fig. 3

Ainda para economizar mais algumas posições de memória foram abolidas as variáveis AA e XX sendo o papel por elas representado entregue a B 1 que intervém no programa com duas atribuições distintas, mas que não se misturam.

Em conclusão, suprimiram-se algumas variáveis, como N, IND, AA, XX e algumas instruções como, por exemplo, READ 11,N PRINT 400 e os respectivos formatos.

A supressão do índice de ordem do argumento na impressão da tabela foi feito com o fim de reduzir o tempo de impressão da tabela que, devido ao elevado número de pontos, começa a ser problema.

Dado que este programa, para além das alterações já indicadas, é formalmente idêntico ao da Fig. 3 só nos resta apresentá-lo: a primeira parte encontra-se na Fig. 4 e a segunda na Fig. 5.

```
-6600  C     ORDENACAO DE DADOS
-6600        DIMENSION A(256,2),X(256,2),W(2)
-6600        DO12 I=1,256
-6612        X(I,1)=A(I,1)
-6684     12 X(I,2)=A(I,2)
-6792        I=1
-6804        A(1,1)=X(1,1)
-6816        A(1,2)=X(1,2)
-6828        DO 2 J=2,256
-6840        KK=1
-6852      1 K2=2.**KK+.01
-6912        M1=256/K2+1
-6960        DO 3 KA=1,M1
-6972        L=J-K2*KA+K2/2-1
-7080        IF (L) 5,4,3
-7136      3 CONTINUE
-7172      5 KK=KK+1
-7208        GO TO 1
-7216      4 I=I-(K2-3)*(256/K2)
-7324        A(J,2)=X(I,2)
-7396      2 A(J,1)=X(I,1)
-7504        STOP
-7516        END
```

Fig. 4

```
-6600        DIMENSION A(256,2),X(256,2),W(2)
-6600        XN=256
-6636        DO 70 J=1,8
-6648        K2=2.**J+0.01
-6708        DO 80 KA=1,2
-6720        M1=256/K2
-6756        DO 80 I=1,M1
-6768        DO 80 L=1,K2
-6780        J1=K2*I-K2+L
-6840        IF (L-K2/2) 91,91,92
-6932     91 J2=J1
-6944        J3=J1+K2/2
-6992        GO TO 93
-7000     92 J2=J1-K2/2
-7060        J3=J1
-7072     93 B1=(L-1)*(256/K2)
-7168        B1=-2.*3.1415926*B1/XN
-7240        W(1)=COS(B1)
-7264        W(2)=SIN(B1)
-7288        GO TO (81,82),KA
-7364     81 B1=A(J3,2)*W(2)
-7424        GO TO 80
-7432     82 B1=-A(J3,2)*W(1)
-7504     80 X(J1,KA)=A(J2,KA)+A(J3,1)*W(KA)-B1
-7840        DO 70 I=1,256
-7852        A(I,1)=X(I,1)
-7924     70 A(I,2)=X(I,2)
-8068        DO 110 J1=1,256
-8080    110 PRINT  13,     A(J1,1),A(J1,2)
-8200     13 FORMAT(6X,E14.8,1X,E14.8)
-8242        STOP
-8254        END
```

Fig. 5

3. TESTES

Os resultados obtidos por utilização dos programas Fortran, acima descritos, vai permitir avaliar a excelência do algoritmo sempre que se conheça o resultado teórico da transformação de Fourier. A comparação dos resultados vai ser apresentada, com um certo detalhe, em dois casos: o primeiro refere-se à transformada de Fourier de um rectângulo e foi realizado pelo programa da Fig. 3; o segundo caso refere-se à obtenção da transformada inversa de $Y(\beta)$ cujo resultado é a exponencial multiplicada pela função escalão (ou de Heaviside) e em que se recorreu ao programa para $N = 256$.

3.1 Trasformada directa do rectângulo

Vamos considerar uma função discreta rectangular $Y(\beta)$ com a seguinte definição

$$Y(\beta) = 1 + j\,0 \quad \text{para} \quad \beta \in \{0, 1, 2, \ldots, 30\}$$
$$Y(\beta) = 0 + j\,0 \quad \text{para} \quad \beta \in \{31, 32, \ldots, 127\}$$

Vamos designar por $X(\alpha) = \mathscr{F}\{Y(\beta)\}$ a transformada discreta de $Y(\beta)$ que se pode calcular teòricamente. Vamos apenas interessar-nos pelo módulo da transformada que tem a seguinte expressão

$$|X(\alpha)| = 31 \frac{\operatorname{sen}(31\,\pi\,\alpha)}{31\,\pi\,\alpha}$$

ou

$$|X_n| = 31 \frac{\operatorname{sen}\left(\pi \dfrac{31}{128} n\right)}{\pi \dfrac{31}{128}} \qquad (28)$$

$$n \in \{0, 1, \ldots, 127\}$$

pois $\alpha = n\,\Delta\,\alpha = \dfrac{n}{128}$.

Os resultados deste cálculo tal como a máquina os dá estão na Fig. 6. Para comparar os módulos da transformada obtida por F. F. T. com a expressão teórica (28) construiu-se a Tabela I, em que se apresentam os primeiros 27 pontos. Ainda no sentido de facilitar a comparação se procedeu na

J1	REAL	IMAGINARIA
1	.310000E 02	-.000000E-50
2	.203196E 02	-.183629E 02
3	.199513E 01	-.292574E 02
4	-.613160E 01	-.326751E 01
5	-.930786E 00	-.195090E 00
6	.431091E 01	-.253336E 01
7	.195694E 01	-.245115E 01
8	-.204460E 01	-.432311E 01
9	-.923880E 00	-.3[illegible]3E 00
10	.229904E 01	-.[illegible]611E 00
11	.183192E 01	-.352082E 01
12	-.792664E 00	-.316449E 01
13	-.831469E 00	-.555570E 00
14	.141782E 01	-.210313E 00
15	.177301E 01	-.210041E 01
16	-.124641E 00	-.253715E 01
17	-.707108E 00	-.707107E 00
18	.887029E 00	.435771E-01
19	.163439E 01	-.134131E 01
20	.309078E 00	-.208902E 01
21	-.555570E 00	-.831470E 00
22	.524894E 00	.131479E 00
23	.147139E 01	-.786477E 00
24	.614403E 00	-.171714E 01
25	-.382683E 00	-.923880E 00
26	.268400E 00	.126944E 00
27	.129028E 01	-.391403E 00
28	.829340E 00	-.138367E 01
29	-.195090E 00	-.980785E 00
30	.904627E-01	.670912E-01
31	.109801E 01	-.109145E 00
32	.973629E 00	-.107423E 01
33	-.104832E-05	-.100000E 01
34	-.227570E-01	-.251073E-01

Fig. 6

TABELA I

n	Valor teórico	Valor F. F. T.
0	31,0000	31,0000
1	28,0944	28,0971
2	20,3472	20,3554
3	10,2837	10,2931
4	0,9954	1,0000
5	5,0132	5,0260
6	6,7171	6,7414
7	4,7588	4,7823
8	0,9936	1,0000
9	2,4220	2,4418
10	3,9523	3,9922
11	3,2228	3,2623
12	0,9852	1,0000
13	1,4090	1,4333
14	2,7401	2,7948
16	2,4832	2,5402
16	0,9745	1,0000
17	0,8626	0,8881
18	2,0462	2,1143
19	2,0362	2,1119
20	0,9602	1,0000
21	0,5172	0,5411
22	1,5885	1,6684
23	1,7284	1,8237
24	0,9432	1,0000
25	0,2786	0,2969
26	1,2587	1,3483

Fig. 7 à representação gráfica da curva teórica e dos pontos obtidos experimentalmente através do algoritmo de F. F. T..

Verificou-se que o tempo de cálculo (com exclusão da entrada e da saída) com o programa da Fig. 3 é de cerca de 18 minutos, no computador IBM 1620.

3.2 Transformada inversa da exponencial

A função $Y(\beta)$ obtém-se da transformada contínua de Fourier da exponencial

$$(a + j2\pi\beta)^{-1}$$

pelo método das dobragens («folding») de tal maneira que resulte um $Y(\beta)$ circunscrito ao intervalo limitado T. Sendo assim, a transformada inversa discreta de $Y(\beta)$, será

$$X(\alpha) = \mathscr{F}^{-1}\left\{Y(\beta)\right\} = \frac{1}{2}\, e^{-a\alpha}$$

ou, por ser $\alpha = n\,\Delta\alpha = \dfrac{n}{256}$

$$X_n = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{a}{256}\,n} \qquad (29)$$

$$n \in \{0, 1, 2, \ldots, 127\}$$

Os valores correspondentes à parte real, a única que nos interessa, é apresentada na Tabela II que também se encontra transposta para o gráfico da Fig. 8 na zona mais significativa da transformada inversa ($n \leqslant 26$). No sentido de se obter um pormenor mais elevado, procedeu-se igualmente à representação do logaritmo neperiano da curva teórica (que é uma recta como se pode concluir de (29)) e dos pontos obtidos experimentalmente pelo algoritmo de F. F. T. (Fig. 9).

O cálculo dura, se for efectuado num computador IBM 1620, cerca de 15 minutos em relação à primeira parte (execução do programa da Fig. 4) e cerca de meia hora no que respeita à segunda parte (execução do programa da Fig. 5).

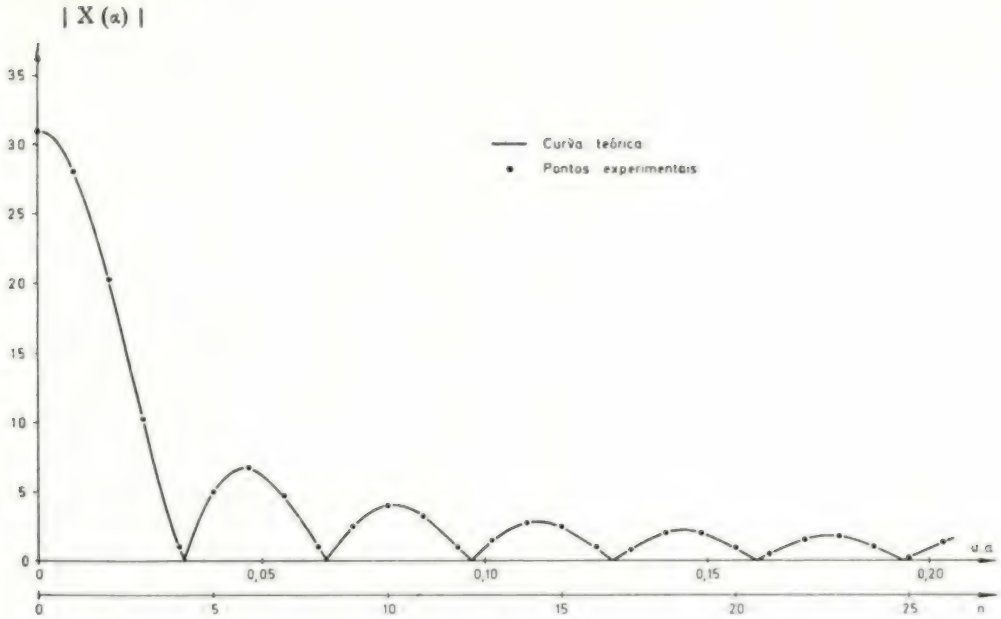


Fig. 7

TABELA II

n	Valor teórico	Valor F.F.T.
0	0,5000	0,4994
1	0,3955	0,3953
2	0,3129	0,3126
3	0,2475	0,2475
4	0,1958	0,1957
5	0,1549	0,1547
6	0,1225	0,1226
7	0,0969	0,0967
8	0,0761	0,0768
9	0,0607	0,0604
10	0,0480	0,0481
11	0,0380	0,0379
12	0,0300	0,0300
13	0,0236	0,0238
14	0,0188	0,0186
15	0,0149	0,0150
16	0,0118	0,0116
17	0,0093	0,0094
18	0,0074	0,0072
19	0,0058	0,0058
20	0,0046	0,0046
21	0,0036	0,0035
22	0,0029	0,0030
23	0,0023	0,0021
24	0,0018	0,0020
25	0,0014	0,0013
26	0,0011	0,0012

4. CONCLUSÕES

Da análise das Tabelas I e II conclui-se que a aproximação obtida com o algoritmo de F. F. T. é boa pois só quando os valores obtidos são pequenos (da ordem de 1°/₀ do valor na origem) é que os erros se tornam importantes. Esta conclusão é compreensível visto o computador cometer erros de arredondamento durante os cálculos; no computador IBM 1620 as representações numéricas são feitas com 8 algarismos decimais.

Para valores até 10°/₀ do valor na origem (valor máximo) o erro relativo obtido é inferior a 1°/₀ e para valores até 1°/₀ do máximo o erro relativo cifra-se em alguns por cento (< 10°/₀).

O programa obtido apresenta-se, portanto, com interesse mesmo para aplicações na análise de sinais apesar do diminuto número de pontos imposto pelo computador IBM 1620. Desta forma a intenção posta no trabalho parece amplamente satisfeita.

BIBLIOGRAFIA

— The fast Fourier transform — E. O. Brigham, R. E. Morrow — Spectrum, Vol. 4, N.º 12 pp. 63-70 (Dezembro 1967);

— Application of the Fast Fourier Transform to Computation of Fourier Integrals, Fourier Series and Convolution Integrals — J.W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch — IEEE Trans. on Audio and Electroacustics, Vol. AU-15, N.º 2, pp. 79-84 (Junho 1967),

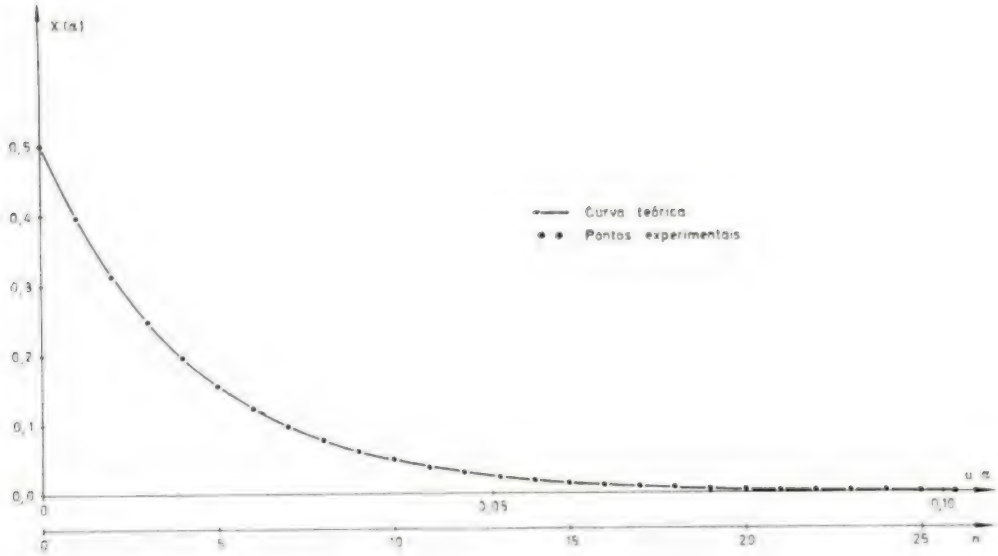


Fig. 8

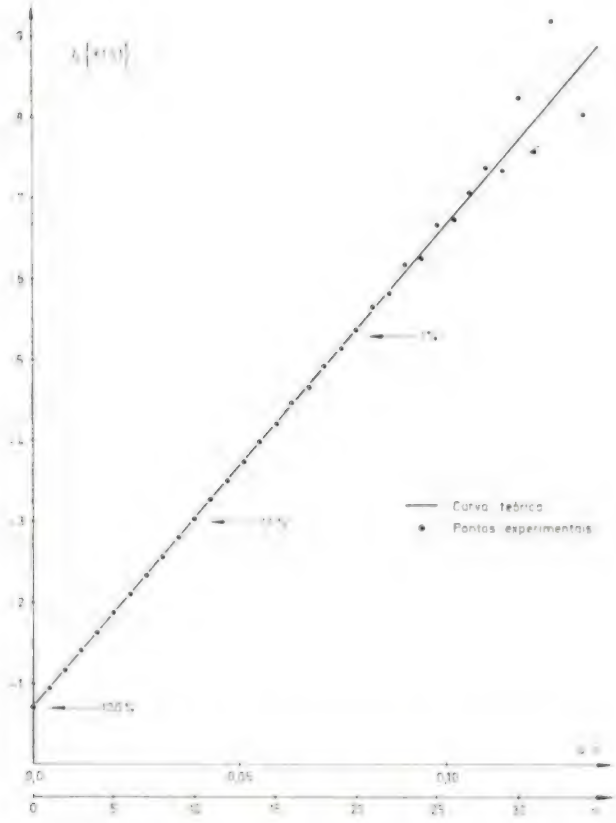


Fig. 9

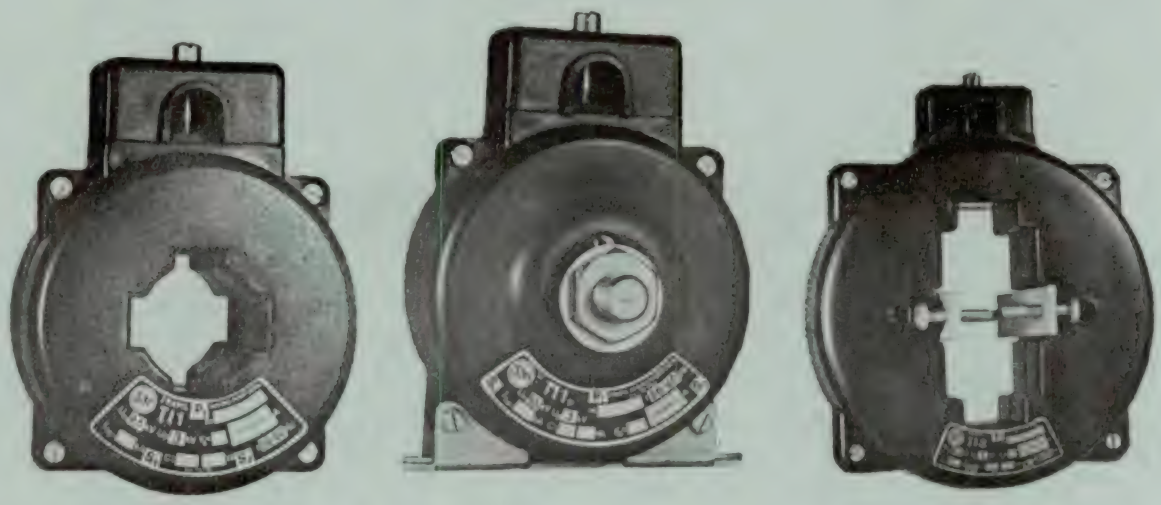
— Fast Fourier Transforms. For Fun and Profit-W. M. Gentleman, G. Sand — Proceedings «Fall Joint Computer Conference 1966»;

— What is the Fast Fourier Transform? — Cochran *et al.* — Proceedings of the IEEE, Vol. 55, n.º 10, pp. 1664 - 1674 (Outubro 1967).

FRAPIL

CONSTRUÇÕES E MONTAGENS ELÉCTRICAS

SARL



transformadores de intensidade

—baixa tensão—

núcleo magnético toroidal • perdas extra-reduzidas • vasta gama de utilizações

caixas de polipropileno antichoque

licença

SACI

SEDE E INSTALAÇÕES FABRIS

CAIS DE SÃO ROQUE
APARTADO 20
TELEFONE 23071 2
AVEIRO

DELEGAÇÃO NO SUL

RUA CASTILHO
38, r/c.-dt.
TELEFONE 5 25 28
LISBOA-1

042.71:2575

ESTAMPARIAS TINTURARIAS LAVANDARIAS

PARA OS VOSSOS TECIDOS TÉCNICOS:
TRANSPORTADORES, MANCHONS, LAPPING, WOLFRIES,
FLANELAS, CANEVAS, ETC.,

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

CONSULTEM:

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS : 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESIRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 7 14 97

C. D. U. 536.212

CONDUÇÃO DE CALOR NUMA PLACA EM REGIME TRANSIENTE

(DISTRIBUIÇÃO INICIAL DE TEMPERATURAS NÃO UNIFORME)

Por J. A. ENCARNAÇÃO COELHO
Eng.º Mecânico
Assist. do I. S. T. (*)

RESUMO

Apresenta-se um método aproximado que permite determinar, para o regime transiente, a evolução de temperaturas numa placa infinita sujeita no instante inicial a uma distribuição de temperaturas arbitrária, F (x), e na fronteira por condições aos limites de 3.ª espécie (convecção para um meio a temperatura constante).

O método consiste na decomposição do problema noutros mais simples cujas soluções têm a particularidade de serem independentes de F (x), facto que torne viável o tabelamento das soluções parcelares, possibilitando a solução do problema para qualquer forma de F (x), por simples combinação linear dessas mesmas soluções.

Para realização númerica programaram-se as expressões deduzidas em linguagem FORTRAN.

SYNOPSIS

The author presents a method that permits to determinate for the transient state, the evolution of temperatures in a infinite plate, submited in the initial instant to an arbitrary distribution of temperatures F (x)

And in the frontier, to limit conditions of 3rd. class (convection for a medium with a constant temperature).

The method consists on the decomposition of the problem in others which solutions have the property of beeing independents of F (x). That permits to make tables of partials solutions making easy the solution of any form of F (x) for a simple lineal combination of the partials solutions.

For a numerical realisation the expressions have been written in «FORTRAN»

0 — INTRODUÇÃO

0.1 — Na grande maioria dos problemas clássicos de condução de calor em regime transiente com distribuições iniciais de temperaturas uniformes, as expressões representativas das soluções apresentam, em geral, uma forma acessível a aplicações numéricas.

Ao pretender generalizar certas soluções para casos com distribuições iniciais de temperaturas não uniformes, corre-se o risco de comprometer a utilização prática das expressões deduzidas, pela complexidade e extensão dos cálculos inerentes a eventuais execuções numéricas.

0.2 — O estudo da condução de calor em regime transiente numa placa infinita segundo y e z, de largura $2L\,(-L \leqslant x \leqslant L)$ e condicionada na fronteira por um meio a temperatura constante T_a, constitui um exemplo concreto do que se pretende evidenciar.

Assim, para o caso de uma distribuição inicial de temperaturas, uniforme, a solução do problema apresenta-se acessível a aplicações numéricas, como provam, por exemplo, os conhecidos gráficos de Heisler [9,10], os quais permitem determinar, com boa aproximação (1) e para qualquer instante, a temperatura no interior da placa.

Por outro lado, para o caso de uma distribuição inicial de temperaturas não uniforme, F(x), a solução é ainda conhecida [2], apresentando-se com a forma

$$(0.1)\quad \frac{\theta}{\theta_o} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[A_i \cos(q_i x)\, e^{-q_i^2 \alpha t} + B_i \operatorname{sen}(\varepsilon_i x)\, e^{-\varepsilon_i^2 \alpha t} \right]$$

(1) Esta aproximação, boa para tempos grandes, diminui ràpidamente quando se aproxima do instante $t = o$.

(*) Laboratório de Termodinâmica Aplicada — Departamento de Eng.ª Mecânica — Instituto Superior Técnico.

em que

$$A_i = \frac{\int_{-L}^{L} F(x) \cos(q_i x)\, dx}{\int_{-L}^{L} \cos^2(q_i x)\, dx} \qquad (0.2)$$

e

$$B_i = \frac{\int_{-L}^{L} F(x) \operatorname{sen}(\varepsilon_i x)\, dx}{\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2(\varepsilon_i x)\, dx} \qquad (0.3)$$

No entanto, expressa a solução nesta forma geral, qualquer aplicação numérica forçará certatamente o utilizador a cálculos morosos e complexos, dado que:

— a arbitrariedade da função F(x) torna impossível o tabelamento de expressão 0.1, excluindo assim a grande vantagem do caso anterior, para o qual a simples utilização dos gráficos de Heisler permite uma rápida aplicação númérica;

— a resolução dos integrais 0.2 e 0.3 ([2]) pode apresentar-se complexa para efeitos de cálculo, complexidade essa que dependerá, òbviamente, da forma de F (x);

— se pode tornar necessário utilizar um número elevado de termos de série 0.1, ao pretender reproduzir, com boa aproximação, a distribuição de temperaturas para instantes próximos do inicial, agravando-se a morosidade dos cálculos com a irregularidade de F (x).

Foi precisamente com o intuito de contornar estas dificuldades que se desenvolveu, no presente trabalho, um processo de cálculo capaz de reproduzir, com boa aproximação, a solução 0.1, proporcionando ao mesmo tempo uma simples e rápida utilização nas aplicações numéricas.

([2]) Coeficientes do desenvolvimento em série da solução em termos de funções próprias.

0.3 — O método que se apresenta, baseou-se no caracter linear de equação do calor,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad (0.4)$$

e das condições de fronteira,

$$K\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \mp h\,\theta \quad \text{para } x = \pm L \qquad (0.5)$$

as quais, pelo facto de serem homogéneas, permitem a utilização do método de sobreposição.

Sendo assim, procurou-se decompor o problema numa série de outros mais simples, de modo a que, pela simples combinação linear das soluções parcelares, se obtivesse a resolução do problema na sua generalidade e que, por outro lado, essas mesmas soluções tivessem a particularidade de serem independentes da função F (x), garantido-se assim a possibilidade do seu tabelamento.

No caso presente, o problema geral foi decomposto numa série de problemas parcelares, idênticos entre si, cada um deles correspondente a uma distribuição inicial de temperaturas da forma (fig. 1)

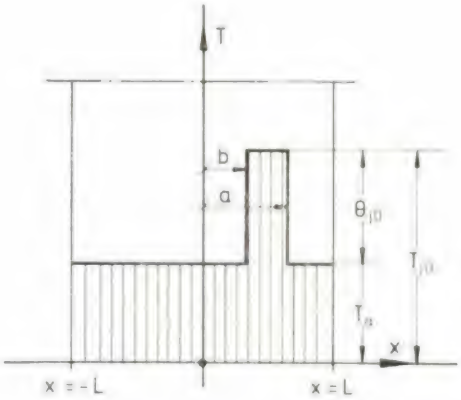


Fig. 1

$$\theta_j(x, o) = I_1(x) \qquad (0.6)$$

com

$$I_1(x) = \theta_{jo}[\,r(x-b) - r(x-a)\,] \qquad (0.7)$$

em que r (x) representa a função unitária de Heaviside [5], "a,, e "b,, são parâmetros ($-L \leqslant b \leqslant L, -L \leqslant a \leqslant L$) e θ_{jo} uma temperatura arbitrária.

Seja θ_j (x, t) a solução que satisfaz simultâneamente a equação do calor 0.4, as condições de fronteira 0.5 e a condição 0.6.

Uma vez conhecida a solução genérica θ_j (x, t) dos problemas parcelares, em função dos parâmetros T_o, a, b, k, α, h, L e T_a, o problema pode ser automàticamente resolvido pelo método de sobreposição.

Assim, a solução do problema pode ser obtida aproximadamente ([3]) pelo somatório

$$\phi(x, t) = \sum_{j=1}^{j=N} \theta_j(x, t) \qquad (0.8)$$

desde que as N soluções θ_j (x, t) correspondam a uma série de distribuições do tipo 0.6, que, no conjunto e depois de sobrepostas, devem reproduzir a função F (x), tal como se encontra esquematizado na figura 2.

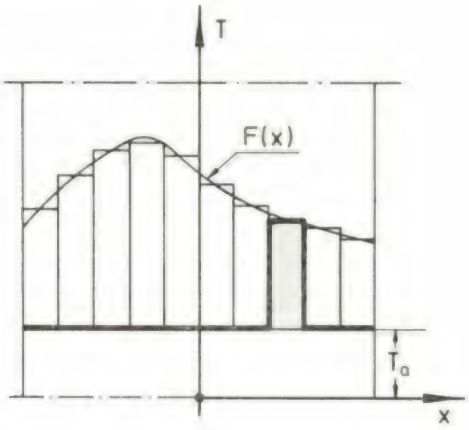


Fig. 2

A partir desta forma, o problema fica reduzido, portanto, à obtenção da solução θ_j (x,t).

0.4 — Criado o modelo físico dos problemas parcelares, efectivada a respectiva formulação matemática, determinadas as soluções correspondentes e o erro máximo destas mesmas soluções, processaram-se, com o auxílio de um computador, todos os cálculos necessários para a elaboração de uma série de gráficos que, no conjunto, proporcionam ao leitor um meio cómodo de aplicação numérica.

1 — SIMBOLOGIA

T, T_j — temperatura
T_a — temperaturatura do meio ambiente
T_o, T_{jo} — temperatura arbitrária
$\theta = T - T_a$
$\theta_j = T_j - T_a$
$\theta_{jo} = T_{jo} - T_a$
$T_j^* = \frac{\theta_j}{\theta_{jo}} = \frac{T_j - T_a}{T_{jo} - T_a}$
ϕ (x,t) função definida por 0.3
x, y e z — coordenadas cartezianas
t — tempo
ρ — massa específica
c — calor específico
K — conductibilidade térmica
$\alpha = \frac{K}{\rho c}$ (difusibilidade térmica)
h — coeficiente de transmissão de superfície
L — metade da espressura da placa
$t^* = \frac{\alpha t}{L^2}$ (número de FOURIER)
$h^* = \frac{h L}{K}$ (número de BIOT)
$x^* = \frac{x}{L}$
a, b } definidos por 0.3
$m = \frac{a}{L}$
$n = \frac{b}{L}$
q_i, ε_i — valores próprios
x (t^*) — função do tempo adimensional
ψ (x^*) — função própria
I_k (x) — representação genérica das distribuições iniciais de temperatura dos problemas parcelares.
F (x) — temperatura na placa para t = o

([3]) A expressão 0.8 é a solução do problema na medida em que satisfaz simultâneamente a equação do calor, 0.4 as condições de fronteira 0.5 e, aproximadamente, a distribuição inicial de temperaturas F(x); a precisão de cálculo será tanto maior quanto menor for a diferença entre os parâmetros a e b, ou seja, quanto maior for o número de termos do somatório 0.8.

Em linguagem mais rigorosa, invocando o teorema do máximo das equações às derivadas parciais do tipo parabólico, pode provar-se que o erro máximo cometido para qualquer t usando 0 8 em vez da solução exacta é menor ou igual à diferença máxima entre F (x) e ϕ (x, t) para t = 0, o que é, aliás, fisicamente intuitivo.

$\left.\begin{matrix} S \\ t_b \end{matrix}\right\}$ definidas por 4.3.2.2

δ_i, A_i, B_i, D_i, E_i, C_i — coeficientes

$\left.\begin{matrix} T_a^* \\ T_b^* \end{matrix}\right\}$ definidos por 4.2.2.1.1

$\supset$ — para designar transformada de Laplace

$\subset$ — para designar a inversa da transformada

[ ] — bibliografia

( ) — notas à margem

2 — FORMULAÇÃO DO MODELO

2.1 — Hipóteses de cálculo

Admite-se que:

a) o material da placa é isótropo;

b) o calor é a única forma de energia permutada entre as várias regiões da placa ou desta com o exterior;

c) as propriedades físicas K, ρ, e c são constantes e independentes da temperatura;

d) o coeficiente de transmissão de calor h é suposto constante e igual nas duas faces limites da placa;

e) a temperatura do meio exterior é suposta uniforme e constante no tempo;

f) não existem fontes de calor no interior da placa;

g) a distribuição inicial de temperaturas é exclusivamente função de x;

h) a função F(x) obedece às condições de Dirichelet [5].

2.2 — Formulação matemática do problema parcelar

2.2.1 — Com base nas premissas anteriores pode-se formular matemàticamente o problema.

Seja $\theta_j = T_j - T_a$.

Assim, no interior da placa ($-L \leqslant x \leqslant L$) e para $t \geqslant 0$, o fenómeno da condução deverá satisfazer a equação do calor

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x^2} \qquad (2.1)$$

sujeita às condições de fronteira

$$K\left(\frac{\partial \theta_j}{\partial x}\right) = \mp h\,\theta_j \text{ para } x = \pm L \text{ e } t \geqslant o \qquad (2.2)$$

e à condição inicial 0.6.

O conjunto da equação 2.1 e das condições 2.2 e 0. 6 definem completamente o problema, garantindo a unicidade da solução $\theta_j(x, t)$ [6].

2.2.2 Com o intuito de simplificar o problema diminuindo o número de variáveis e parâmetros em jogo, optou-se pelo uso das seguintes variáveis adimensionais

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad T_j^* = \frac{\theta_j}{\theta_{jo}}$$

$$t^* = \frac{\alpha t}{L^2} \qquad m = \frac{a}{L} \qquad (23)$$

$$h^* = \frac{hL}{K} \qquad n = \frac{b}{L}$$

Em função das novas variáveis, o sistema atrás formulado toma a forma

$$\frac{\partial T_j^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial x^{*2}} \quad \text{para} \quad \begin{matrix} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ t^* \geqslant 0 \end{matrix} \qquad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial T_j^*}{\partial x^*}\right) = \mp h^* T_j^* \quad \text{para} \quad \begin{matrix} x^* = \pm 1 \\ t^* \geqslant 0 \end{matrix} \qquad (2.5)$$

$$T_j^*\ (x^*, 0) = I_2\ (x^*) \qquad \begin{matrix} \text{para } t^* = 0 \\ -1 \leqslant x^* \leqslant 1 \end{matrix} \qquad (2.6)$$

com

$$I_2(x^*) = r(x^* - n) - r(x^* - m) \qquad (2.7)$$

3 — RESOLUÇÃO

3.1 — Para resolução analítica, recorreu-se ao método da separação de variáveis.

Assim, começou-se por admitir que

$$T_j^*\ (x^*, t^*) = \varphi(t^*)\,\psi(x^*) \qquad (3.1)$$

em que φ é função apenas de variável t^* e ψ uma função dependente, exclusivamente, da inicial x^*.

Derivando 3.1 em ordem a x^* e t^* e substituindo o resultado em 2.4, obtém-se

$$\frac{1}{\psi}\frac{d^2\varphi}{dx^{*2}} = \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt^*} \tag{3.2}$$

em que o primeiro membro é só função de x^* e o segundo de t^*.

Como x^* e t^* são variáveis independentes, a equação 2.4 só é satisfeita se ambos os membros de 3.2 forem iguais a uma constante λ, nos intervalos

$$\begin{aligned} -1 \leqslant x^* \leqslant 1 \\ t^* \geqslant 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $h^* > 0$ por definição, demonstra-se matemàticamente que a constante λ deverá ser < 0 [2] o que possui um caracter físico evidente (4).

Este facto pode exprimir-se fazendo desde já

$$\lambda = -\delta_i^2 \tag{3.4}$$

em que δ_i é uma constante arbitrária.

Da expressão 3.2 resultará pois

$$\frac{d^2\psi}{dx^{*2}} + \delta_i^2\,\psi = 0 \tag{3.5}$$

e

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\delta_i^2\,dt^* \tag{3.6}$$

Integrando a equação 3.6 pode concluir-se imediatamente que

$$\varphi_i = c_i\,e^{-\delta_i^2 t^*} \tag{3.7}$$

em que c_i é uma constante arbitrária.

Por outro lado, a equação 3.5 (equação de Helmotz) [1] admite como integrais particulares as funções (funções próprias [1])

$$\psi_i = D_i \cos(\delta_i x^*) \tag{3.8}$$

ou

$$\psi_i = E_i \operatorname{sen}(\delta_i x^*) \tag{3.9}$$

em que D_i e E_i são constantes arbitrárias.

Atendendo às expressões 3.1, 3.7, 3.8 e 3.9 podemos concluir que tanto

$$T^*_{ji}(x^*, t^*) = A_i\,e^{-\delta_i^2 t^*}\cos(\delta_i x^*) \tag{3.10}$$

como

$$T^*_{ji}(x^*, t^*) = B_i\,e^{-\delta_i^2 t^*}\operatorname{sen}(\delta_i x^*) \tag{3.11}$$

são soluções particulares (5) da equação 2.4, sendo A_i e B_i constantes arbitrárias.

3.2 Adaptação das soluções particulares às condições de fronteira

Para que as soluções particulares $T^*_{ji}(x^*, t^*)$ satisfaçam as condições de fronteira, a constante δ_i não pode assumir valores arbitrários.

Assim, substituindo a solução 3.10 nas condições 2.5, conclui-se que δ_i só pode tomar valores que satisfaçam a equação transcendente

$$\frac{\delta_i}{h^*} = \operatorname{cotg}\delta_i \tag{3.12}$$

Seja q_i $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ a representação genérica dos valores de δ_i que satisfazem 3.12.

Do mesmo modo, para que a solução 3.11 verifique as condições 2.5 os valores de δ_i deverão ser determinados pela equação

$$\frac{\delta_i}{h^*} = -\operatorname{tag}\delta_i \tag{3.13}$$

Seja ε_i $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ a representação genérica dos valores de δ_i que verificam 3.13.

Designam-se por valores próprios os valores de δ_i que satisfazem as equações 3.12 e 3.13.

(4) As equações 3.10 e 3.11 revelam que se o expoente do exponencial fosse positivo, $T^*_{ji}(x^*, t^*)$ tendia para ∞ quando $t^* \to \infty$, o que é físicamente absurdo.

(5) Como não se impôs qualquer condição restritiva ao valor de δ_i, A_i e B_i, podemos afirmar que existe uma infinidade de soluções do tipo 3.10 e 3.11 que satisfazem a equação do calor 2.4; além disso, pelo facto desta última equação ser linear homogénea qualquer combinação linear destas soluções particulares continua a satisfazer a equação do calor.

As funções

$$T^*_{ji}\ (x^*, t^*) = A_i\ e^{-q_i^2 t^*} \cos\ (q_i x^*) \qquad (3.14)$$

e

$$T^*_{ji}\ (x^*, t^*) = B_i\ e^{-\varepsilon_i^2 t^*} \operatorname{sen}\ (\varepsilon_i x^*) \qquad (3.15)$$

além de serem soluções particulares da equação do calor satisfazem, portanto, as condições de fronteira 2.5.

3.3 Adaptação da solução à condição inicial

No instante $t^* = 0$, as funções 3.14 e 3,15 tomam, respectivamente, a forma

$$T^*_{ji} = A_i \cos\ (q_i x^*) \qquad (3.16)$$

e

$$T^*_{ji} = B_i \operatorname{sen}\ (\varepsilon_i x^*) \qquad (3.17)$$

as quais, só por si, não conseguem reproduzir a condição 2.6 correspondente a $t^* = 0$.

No entanto, como o conjunto de formações do tipo 3.16 e 3.17 constitui um sistema ortogonal completo [4] e como por hipótese a função correspondente à distribuição inicial satisfaz as condições de Dirichelet [5], podemos afirmar que uma série do tipo

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \cos\ (q_i x^*) + B_i \operatorname{sen}\ (\varepsilon_i x^*) \qquad (3.18)$$

pode reproduzir [4] a função T^*_j no instante inicial.

Como, por outro lado, as equações 2.4 e 2.5 são lineares e homogéneas, a solução do problema pode ser representada, por uma série do tipo

$$T^*_j\ (x^*, (x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} [A_i\ e^{-\varepsilon_i^2 t^*} \cos\ (q_i x^*) + B_i\ e^{-\varepsilon_i^2 t^*} \operatorname{sen}\ (\varepsilon_i x^*)] \qquad (3.19)$$

Resta, pois, determinar as constantes A_i e B_i, de tal modo que $T^*_j\ (x, 0)$ satisfaça a condição 2.6.

Com base nas propriedades das funções ortogonais [5] e atendendo ao especificado na condição 2.6, podemos calcular as constantes A_i e B_i, respectivamente, pelas expressões

$$A_i = \frac{\int_n^m \cos\ (q_i x^*)\ d x^*}{\int_n^m \cos^2\ (q_i x^*)\ d x^*} \qquad (3.20)$$

e

$$B_i = \frac{\int_n^m \operatorname{sen}\ (\varepsilon_i x^*)\ d x^*}{\int_n^m \operatorname{sen}^2\ (\varepsilon_i x^*)\ d x^*} \qquad (3.21)$$

as quais, depois de integradas, conduzem a

$$A_i = \frac{\operatorname{sen}\ (m q_i) - \operatorname{sen}\ (n q_i)}{\cos\ (q_i) \operatorname{sen}\ (q_i) + q_i} \qquad (3.22)$$

e

$$B_i = \frac{\cos\ (n \varepsilon_i) - \cos\ (m \varepsilon_i)}{\varepsilon_i - \cos\ (\varepsilon_i) \operatorname{sen}\ (\varepsilon_i)} \qquad (3.23)$$

Entrando com 3.23 e 3.22 em 3.19, obtém-se finalmente

$$\boxed{T^*_j(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}\ (m q_i) - \operatorname{sen}\ (n q_i)}{\cos\ (q_i) \operatorname{sen}\ (q_i) + q_i}\ e^{-q_i^2 t^*} \cos\ (q_i x^*) + \frac{\cos\ (n \varepsilon_i) - \cos\ (m \varepsilon_i)}{\varepsilon_i - \cos\ (\varepsilon_i) \operatorname{sen}\ (\varepsilon_i)}\ e^{-q_i^2 t^*} \operatorname{sen}\ (\varepsilon_i x^*) \right]} \qquad (3.24)$$

4 — ANÁLISE DA SOLUÇÃO $T_j^*(x^*, t^*)$ PARA INTERVALOS PRÓXIMOS DE $t^* = 0$

4.1 Formalmente, nada havia a acrescentar à solução representada pela expressão 3.24. No entanto, uma análise mais detalhada das suas possibilidades como eventual meio de cálculo em aplicações numéricas permite-nos concluir que, tal como a solução geral 0.1, apresenta o grave inconveniente de necessitar de um grande número de termos para reproduzir, com boa aproximação, a evolução de temperaturas no interior da placa (no intervalo de tempo $0 \leqslant t^* \leqslant t_1^*$, com t_1^* pequeno). Esta falha é particularmente acentuada, no caso presente, pelo facto da função $I_2(x^*)$ ser descontínua nos pontos $x^* = n$ e $x^* = m$.

Para contornar a dificuldade, deduziu-se uma outra expressão capaz de reproduzir $T_j^*(x^*, t^*)$, no intervalo $0 \leqslant t^* \leqslant t_1^*$, utilizando-se para o efeito um modelo físico e um método analítico diferentes dos utilizados na determinação da solução 3.24.

4.2 — Formulação do novo modelo

4.2.1 — Para definição deste novo modelo, decompôs-se a sua formulação em dois casos distintos, correspondendo cada um deles, respectivamente, a duas formas particulares da função $I_2(x^*)$.

Assim, considerou-se agregado ao primeiro caso, que por comodidade de exposição designaremos por CN1, uma distribuição inicial $I_2(x^*)$, com $m \neq \pm 1$ e $n \neq \pm 1$ (fig. 3a) e ao segundo caso (CN2) uma distribuição do mesmo tipo mas com $m = 1$ e $n \neq \pm 1$ (ou $m \neq \pm 1$ e $n = -1$) fig. 3b.

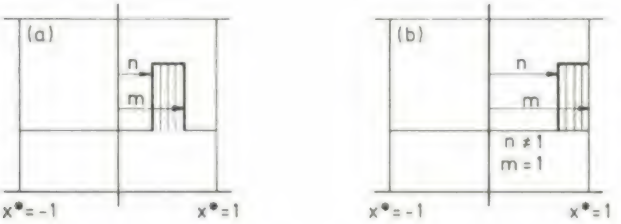


Fig. 3

Seja $0 \leqslant t^* \leqslant t_1^*$, um intervalo de tempo que precede o instante inicial.

Se t_1^* for suficientemente pequeno, pode-se admitir que:

— para o caso CN1

$$\left.\begin{array}{l} T_j^* \simeq 0 \\ \dfrac{\partial T_j^*}{\partial x^*} \simeq 0 \end{array}\right] \text{ para } \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant t^* \leqslant t_1^* \\ x^* = 1 \\ \text{e} \\ x^* = -1 \end{array}\right. \tag{4.1}$$

— para o caso CN2

$$\left.\begin{array}{l} T_j^* \simeq 0 \\ \left(\dfrac{\partial T_j^*}{\partial x^*}\right) \simeq 0 \end{array}\right] \text{ para}$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant t^* \leqslant t_1^* \\ x^* = -1 \quad \text{quando } m = 1 \text{ e } n \neq \pm 1 \\ x^* = 1 \quad \text{quando } m \neq \pm 1 \text{ e } n = -1 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Sendo assim, para efeitos de determinação de evolução da temperatura $T_j^*(x^*, t^*)$ nos intervalos $0 \leqslant t^* \leqslant t_1^*$ e $-1 \leqslant x^* \leqslant 1$, torna-se viável a substituição da placa infinita por:

— um corpo infinito ($-\infty \leqslant x^* \leqslant \infty$) no caso CN1;

— um corpo semi-infinito

$-1 \leqslant x^* \leqslant \infty$ quando $n = -1$ e $m \neq \pm 1$

ou

$-\infty \leqslant x^* \leqslant 1$ quando $m = 1$ e $n \neq \pm 1$

no caso CN2.

Esta equivalência de modelos é, òbviamente, tanto mais correcta quanto menor for o instante t_1^*.

Oportunamente, especificaremos o critério estabelecido para a escolha do valor do instante t_1^*.

4.2.2. Definidos os novos modelos físicos, passa-se a apresentar as respectivas formulações matemáticas.

4.2.2.1 Para o caso CN1 pretende-se determinar uma solução equivalente a $T_j^*(x^*, t^*)$ nos intervalos

$$\begin{array}{l} -\infty \leqslant x^* \leqslant \infty \\ 0 \leqslant t^* \leqslant t_1^* \end{array} \tag{4.3}$$

Sendo assim, $T_j^*(x^*, t^*)$ deverá satisfazer a equação do calor

$$\frac{\partial T_j^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial x^{*2}} \tag{4.4}$$

nos intervalos 4.3. Além disso, deverá reproduzir a condição inicial

$$T_j^*(x^*,0) = I_3(x^*) \quad \text{para} \quad -\infty \leqslant x^* \leqslant \infty \qquad (4.5)$$

com

$$I_3(x^*) = r(x^* - n) - r(x^* - m) \qquad (4.6)$$

Como condições auxiliares de integração, podem-se usar

$$T_j^*(-\infty, t^*) = 0 \qquad (4.7)$$

e

$$T_j^*(\infty, t^*) = 0 \qquad (4.8)$$

4.2.2.2 Seja $r^* = x^* + 1$, $m_1 = m + 1$ e $n_1 = n + 1$

Para o caso CN2 pretende-se determinar a solução $T_j^*(r^*, t^*)$ nos intervalos ([6]).

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant r^* \leqslant \infty \\ 0 &\leqslant t^* \leqslant t_j^* \end{aligned} \qquad (4.9)$$

Sendo assim, $T_j^*(r^*, t^*)$ deverá satisfazer a equação do calor

$$\frac{\partial T_j^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial r^{*2}} \qquad (4.10)$$

a condição ao limite

$$\left(\frac{\partial T_j^*}{\partial r^*}\right) = h^* T_j^* \quad \text{para} \quad r^* = 0 \qquad (4.11)$$

([6]) Por razões de simetria apenas consideramos o caso de $n = -1$ e $m \neq \pm 1$, correspondente ao intervalo 4.9

e a condição inicial

$$T_j^*(r^*, 0) = I_4(r^*) \quad \text{para} \quad 0 \leqslant r^* \leqslant \infty \qquad (4.12)$$

com

$$I_4(r^*) = r(r^* - n_1) - r(r^* - m_1) \qquad (4.13)$$

Como condição auxiliar de integração, pode-se usar

$$T_j^*(\infty, t^*) = 0 \text{ para } r^* = \infty \qquad (4.14)$$

Este último sistema, tal como foi formulado, dificulta a respectiva resolução analítica. Para sua simplificação, utilizou-se, mais uma vez, o método da sobreposição.

Por comodidade de exposição designaram-se, respectivamente, por CN2/1 e CN2 2, os dois problemas parcelares em que se decompôs o caso CN2.

4.2.2.1.1 O problema CN2/1 consistiu na determinação de uma função que se designou por $T_a^*(r^*, t^*)$, correspondente à solução representativa de distribuição de temperaturas num corpo infinito $(-\infty \leqslant \gamma^* \leqslant \infty)$ sujeito no instante inicial a uma distribuição

$$T_a^*(r^*, 0) = I_5(r^*) \text{ para } -\infty \leqslant r^* \leqslant \infty \qquad (4.15)$$

em que

$$I_5(r^*) = r(\gamma^* - n_2) - r(\gamma^* - m_2) \qquad (4.16)$$

com $n_2 = m + 1$ e $m_2 \gg 2$ (fig. 4),

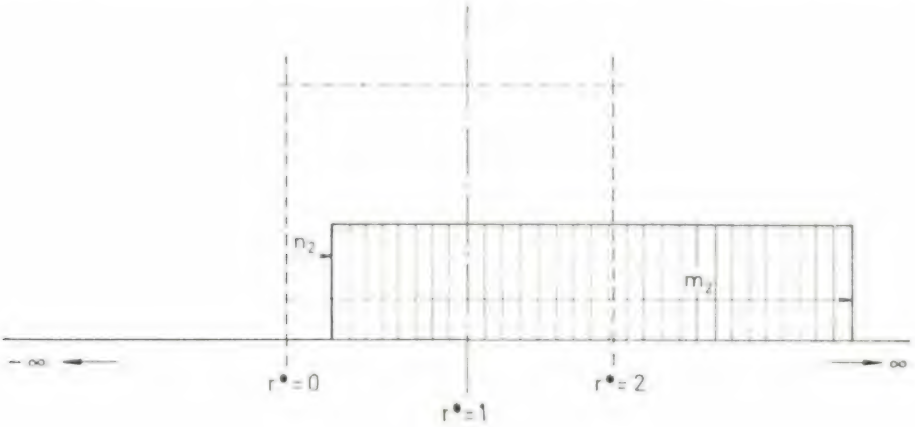
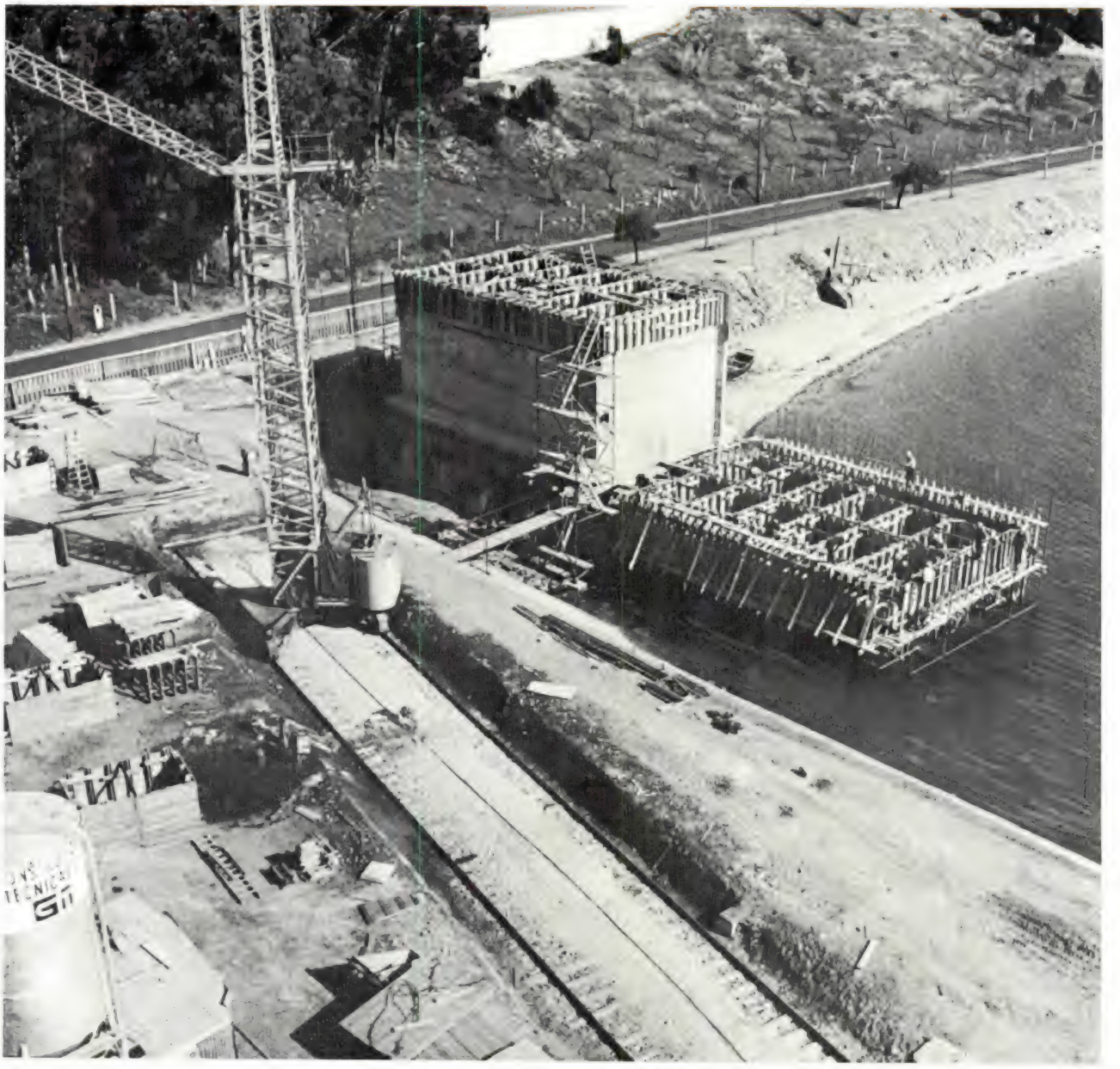


Fig. 4

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2 • DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE

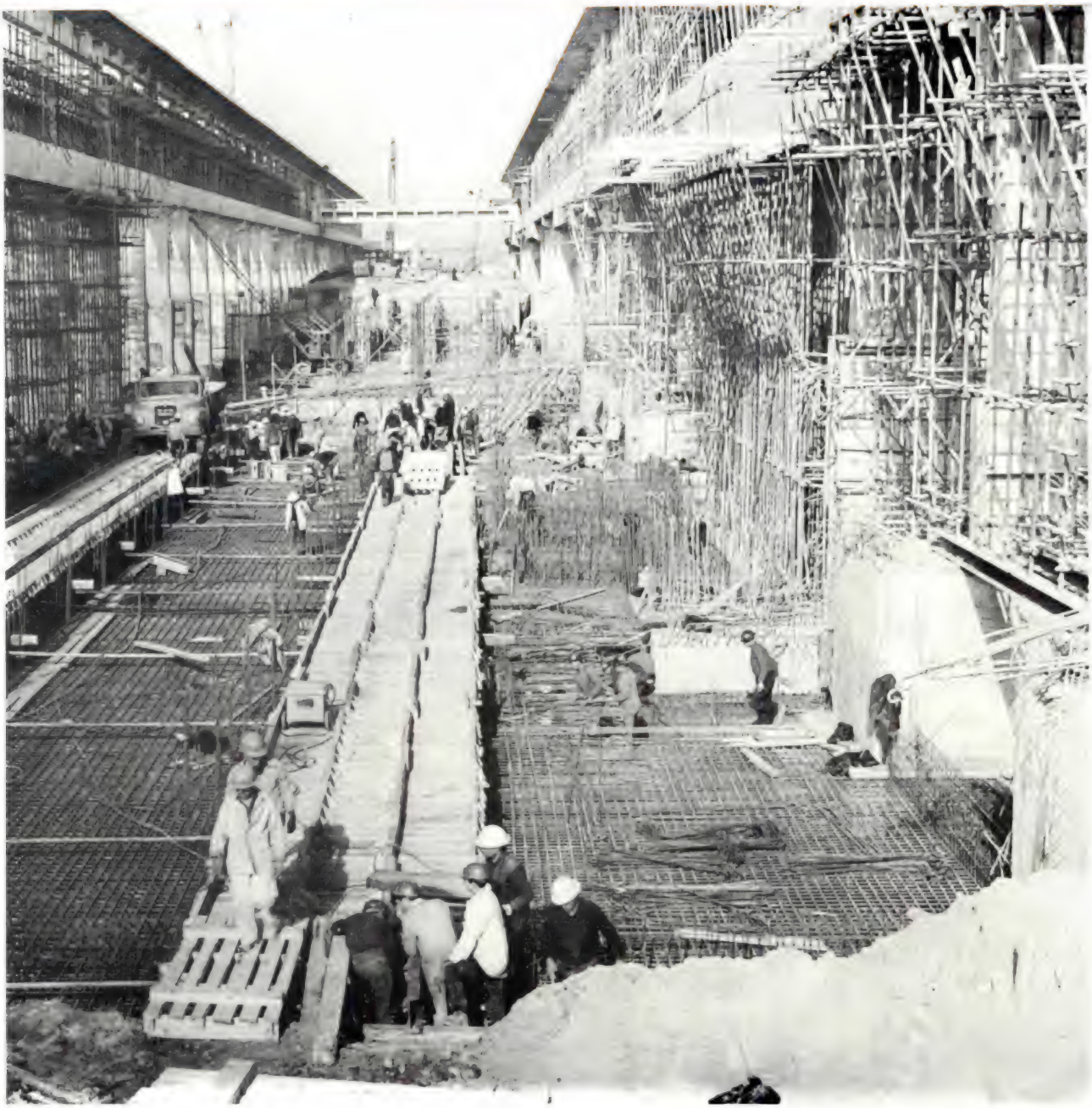


MINES D'ALJUSTREL — Setúbal (Cachofarra) — Carreiras de construção de caixotões flutuantes para a execução de um cais de carga de minérios, no Sado

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS
SILOS E CHAMINÉS
FUNDAÇÕES ESPECIAIS
PONTES E VIADUTOS
CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2 • DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE



SIDERURGIA NACIONAL — Seixal — Estruturas da Instalação de Laminagem (2.ª fase) — Grandes Naves Fabris.

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS
SILOS E CHAMINÉS
FUNDAÇÕES ESPECIAIS
PONTES E VIADUTOS
CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

devendo a função T_a^* satisfazer ainda, a equação do calor

$$\frac{\partial T_a^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T_a^*}{\partial r^{*2}} \qquad (4.17)$$

Como condições auxiliares de integração podem-se utilizar

$$T_a^* (-\infty, t^*) = 0 \qquad (4.18)$$

e

$$T_a^* (\infty, t^*) = 0 \qquad (4.19)$$

4.2.2.1.2 O problema CN 2/2 consistiu na determinação de uma outra função que se designou por $T_b^* (r^*, t^*)$, correspondente à solução representativa da distribuição de temperaturas num corpo semi-infinito ($0 \leqslant r^* \leqslant \infty$) sujeito no instante inicial a uma distribuição

$$T_b^* (r^*, 0) = 1 \qquad (4.20)$$

devendo a função T_b^* satisfazer ainda a equação 4.17 nos intervalos

$$\begin{aligned} o \leqslant r^* \leqslant \infty \\ o \leqslant t^* \leqslant t_1^* \end{aligned} \qquad (4.21)$$

e a condição de fronteira

$$\frac{\partial T_b^*}{\partial r^*} = h^* T_b^* \text{ para } r^* = 0 \qquad (4.22)$$

Como condição auxiliar de integração, pode-se utilizar

$$T_b^* (\infty, t^*) = 1 \qquad (4.23)$$

4.2.2.1.3 A solução do sistema correspondente ao caso CN2, poderá ser representada com rigor pela função

$$T_j^* (r^*, t^*) = T_b^* (r^*, t^*) - T_a^* (r^*, t^*) \qquad (4.24)$$

Se, no intervalo $0 \leqslant t^* \leqslant t_1^*$, se verificar

$$T_a^* \simeq 0 \quad \text{para} \quad r^* = 0 \qquad (4.25)$$

$$T_a^* \simeq 1 \quad \text{para} \quad r^* = 2 \qquad (4.26)$$

$$T_b^* \simeq 1 \quad \text{para} \quad r^* = 2 \qquad (4.27)$$

A condição 4.26 pode ser satisfeita escolhendo para m_2 um valor suficientemente grande e para t_1^* um valor suficientemente pequeno. Este último requesito torna-se igualmente necessário para a satisfação de 4.25 e 4.27.

4.3 — Resolução analítica

4.3.1 — A solução do sistema de equações correspondente ao caso CN1, é conhecida [3] e apresenta-se com a forma

$$\boxed{T_j^* (x^*, t^*) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{m - x^*}{2\sqrt{t^*}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{n - x^*}{2\sqrt{t^*}}\right)\right]} \qquad (4.28)$$

em que erf ( ) é a conhecida «error function».

4.3.2 — A solução do sistema correspondente ao caso CN2 pode ser determinada, como se viu, pela expressão 4.24.

A resolução analítica fica pois reduzida à determinação das funções $T_a^* (r^*, t^*)$ e $T_b^* (r^*, t^*)$.

4.3.2.1 — O sistema correspondente ao problema CN2/1 é idêntico ao apresentado no parágrafo 4.2.2.1.

A solução é portanto análoga a 4.28, bastando substituir x^* por r^*, m por m_2 e n por n_2.

Por outro dado, como se pretende a solução apenas nos intervalos $0 \leqslant r^* \leqslant 2$ e $0 \leqslant t^* \leqslant t_1^*$, torna-se possível fazer $\operatorname{erf}\left(\frac{m_2 - r^*}{2\sqrt{t^*}}\right) \simeq 1$, desde que se escolha um valor de m_2 suficientemente grande, como exige, aliás, a condição 4.26.

Sendo assim, a solução do problema CN21, pode ser representada pela expressão

$$T_a^* (r^*, t^*) = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{n_2 - r^*}{2\sqrt{t^*}}\right)\right] \qquad (4.29)$$

4.3.2.2 — Para determinação da forma de função T_s^* (r^*, t^*) usou-se, como ferramenta matemática a transformada de Laplace.

Assim, aplicando esta transformada em relação é variável t^* na equação 4.17, obtém-se

$$S\, t_b - T_b\,(r^*, o^+) = \frac{d^2 t_b}{d r^{*2}} \qquad (4.30)$$

em que

$$\frac{1}{S} \supset 1 \qquad (4.31)$$

e

$$t_b\,(r^*, s) \supset T_b^*\ (s^*\, t^*) \qquad (4.32)$$

Entrando com 4.20 em 4.30 e fazendo $P^2 = S$, obtém-se

$$\frac{d^2 t_b}{d r^{*2}} - P^2 t_b = -1 \qquad (4.33)$$

que é uma equação diferencial ordinária, linear de coeficientes constantes. O integral geral da equação homogénea conspondente pode representar-se por

$$t_{b1} = C_1\, e^{-P r^*} + C_2\, e^{P r^*} \qquad (4.34)$$

em que C_1 e C_2 são constantes.

Por outro lado, o integral particular de 4.33 é igual neste caso a

$$t_{b2} = \frac{1}{S} \qquad (4.35)$$

A solução de 4.33, pode determinar-se fàcilmente a partir de 4.34 e 4.35.

Assim, será

$$t_b = t_{b1} + t_{b2} = C_1\, e^{-P r^*} + C_2\, e^{P r^*} + \frac{1}{S} \qquad (4.36)$$

Por sua vez a representação em termos da transformada de Laplace de 4.22 e 4.23 é

$$\frac{d\, t_b}{d\, r^*} = h^*\, t_b \qquad \text{para } r^* = 0 \qquad (4.37)$$

e

$$t_b\,(\infty, S) = \frac{1}{S} \qquad \text{para } r^* = \infty \qquad (4.38)$$

que permite determinar o valor das constantes C_1 e C_2.

Substituindo os valores destas constantes na expressão 4.36 e simplificando, encontra-se fàcilmente

$$t_b = \frac{1}{S} - h^* \frac{e^{-P r^*}}{S\,(P + h^*)} \qquad (4.39)$$

Utilizando uma tabela de transformadas de Laplace [3], pode obter-se a solução

$$T_b^*\,(r^*, t^*) = \text{erf}\left(\frac{r^*}{2\sqrt{t^*}}\right) + \exp\,(h^*\, r^* + t^*\, h^{*2}) \times \text{erfc}\left(\frac{r^*}{2\sqrt{t^*}} + h^*\sqrt{t^*}\right) \qquad (4.40)$$

em que erfc ( ) = 1 — erf ( ).

4.3.2.3 Entrando com 4.40 e 4.29 em 4.24 e fazendo $r^* = x^* + 1$ e $n_2 = +1$, pode determinar-se a solução correspondente ao caso CN2, que toma a forma

$$\boxed{T_j^*\,(x^*, t^*) = \text{erf}\left(\frac{x^* + 1}{2\sqrt{t^*}}\right) + \exp\left[\, h^*\,(x^* + 1) + t^*\, h^{*2}\,\right] \times \text{erfc}\left(\frac{x^* + 1}{2\sqrt{t^*}} + h^*\sqrt{t^*}\right) - \frac{1}{2}\left[\, 1 - \text{erf}\left(\frac{m - x^*}{2\sqrt{t^*}}\right)\right]} \qquad (4.41)$$

5 SOLUÇÃO NUMÉRICA

5.1 Nas aplicações numéricas cuja realização depende de expressões complexas, o cálculo pode tornar-se extremamente moroso, pelo que se considera de interesse, nestes casos, a apresentação das soluções numa forma acessível a uma utilização rápida e simples.

No caso presente, houve a preocupação de efectuar tal procedimento em relação às soluções obtidas.

Assim, todos os elementos numéricos obtidos a partir das expressões 3.24, 4.28 e 4.41 foram centralizadas numa colecção de gráficos ([7]) que no conjunto, constituem um meio cómodo de manipulação numérica. A título exemplificativo apresenta-se no apendice B um extracto dessa colecção.

A apresentação dos elementos e meios necessários a este processamento encontra-se esquematizada nas alíneas seguintes.

5.2 Para realização numérica, utilizou-se um valor de 0.2 para a diferença entre os parâmetros m e n. Por razões de simetria, apenas foram calculados os valores de T^*_j correspondentes aos intervalos

$$\begin{aligned} -1.0 \leqslant n \leqslant -0.2 \\ -0.8 \leqslant m \leqslant 0.0 \end{aligned} \qquad (5.1)$$

com $m = 0.2 + n$.

5.3 Os cálculos efectuados foram divididos em dois grupos: o primeiro, relativo à obtenção dos valores de T^*_j a partir das expressões 4.28 e 4.41; o segundo, referente ao cálculo dos valores da mesma grandeza, mas com base na expressão 3.24.

O campo de acção das duas primeiras expressões, está, como se viu, limitado pelas condições 4.25, 4.26 e 4.27.

Estes requesitos, condicionam o emprego destas expressões apenas ao intervalo de tempo $0 \leqslant t^* \leqslant t^*_1$, com t^*_1 relativamente pequeno.

Havia, pois, que estabelecer um critério para escolha do valor do instante t^*_1, critério esse que foi definido com base nas seguintes cláusulas.

Para $t^* = t^*_1$ deverá verificar-se:

a) $T^*_j < 0.001$ calculado pela expressão 4.28 para $x^* = -1$, $m = -0.6$, $n = -0.8$

b) $T^*_a < 0.001$ calculado pela expressão 4.29 para $r^* = 0$, $n_2 = 0.2$

c) $T^*_a > 0.999$ calculado pela expressão 4.29 para $r^* = 2$, $n_2 = 0.2$

d) $T^*_b > 0.999$ calculado pela expressão 4.40 para $r^* = 2$

Com base neste condicionalismo, optou-se por um valor de $t^*_1 = 0.002$.

5.4 O grande volume de cálculos a realizar obrigou a utilizar um computador, sem o auxílio do qual era pràticamente impossível a solução do problema numa forma gráfica.

Para isso programaram-se, em linguagem «FORTRAN», as diferentes fases do problema.

5.5 Para finalizar, apresentam-se, de um modo sucinto, as diferentes etapas em que escalonamos o processamento numérico.

5.5.1 Cálculo dos valores de T^*_j, no intervalo de tempo $0.0001 \leqslant t^* \leqslant 0.002$.

Utilizaram-se para o efeito as expressões 4.28 e 4.41.

5.5.2 — Determinação do número de termos da série 3.24, necessários à sua utilização.

([7]) A colecção completa de gráficos, pode ser solicitada ao Laboratório de Termodinâmica Aplicada (Departamento de Eng.ª Mecânica do I. S. T.).

A solução numérica abrange os seguintes intervalos

$1.000 \leqslant T^* \leqslant$		0.001	(com variação contínua)
$0.0001 \leqslant t^* \leqslant$		100.0000	(com variação contínua)
$0.05 \leqslant h^* \leqslant$		90.00	(com 10 valores paramétricos)
$-1 \leqslant x^* \leqslant$		1	(com 16 valores paramétricos)
$0.8 \leqslant m \leqslant$		0.0	(com 5 valores paramétricos)
$1.0 \leqslant n \leqslant$		0.2	(com 5 valores paramétricos)

Para resolução desta etapa elaborou-se o programa n.º 1 (Quadro I). As instruções deste programa foram concebidas de modo a perguntar ao computador qual o número de termos, N, da série 3.24, a partir do qual a diferença entre os valores de T_j^* por ela calculados e os correspondentes à função $I_2(x^*)$ passava a ser inferior a 0.005 ([8]).

A comparação dos resultados foi, evidentemente, efectuada para $t^* = 0$, instante em que a distribuição de temperatura é conhecida e coincide com $I_2(x^*)$; além disso, utilizou-se $h^* = \infty$, pelo motivo de ser extremamente simples, para este valor de x^*, o cálculo ([9]) de valores próprios (ε_i e q_i) correspondentes.

A resposta do computador foi $N = 55$.

5.5.3 — Cálculo dos valores de ε_i e q_i

Com base nas equações 3.12 e 3.13 elaborou-se o programa n.º 2 (Quadro II) que permitiu a determinação dos primeiros 55 valores de ε_i q_i ([10]), para diferentes valores de h^*.

5.54 — Cálculo dos valores de T_j^* no intervalo

$$0.002 \leqslant t^* \leqslant 800.$$

Para realização desta última etapa utilizou-se o programa n.º 3 (Quadro III), tendo servido de dados os valores de ε_i e q_i anteriormente calculados.

Ao elaborar este programa, houve a preocupação de reduzir ao máximo o tempo de operação do computador.

Para isso, as instruções foram elaboradas de modo a que fosse utilizado, na série 3.24, apenas o número de termos indispensáveis para se manter a precisão de cálculo estabelecido para $t^* = 0.002$.

Para este instante o computador utilizou os 54 ([11]) previstos pelo processamento n.º 3. Em contrapartida, para $t^* = 800$, utilizou apenas um termo, tendo-se verificado, no conjunto dos cálculos, uma redução de tempo de 80 %.

QUADRO I

```
PDP FORTRAN C3
START
-6600          PRINT 1
-6612        1 FORMAT(17HPROGRAMA NUMERO 1)
-6670          DO 500 J=1,19,2
-6682          RJ=J
-6718          X=-1.+.1*RJ
-6766          T1=0.
-6774          Y=3.1415926/2.
-6014          DO 200 I=1,9999
-6026          RI=I
-6862          Q=(RI-1.)*3.141592+Y
-6922          E=Q+Y
-6958          SQ=SIN(Q)
-6902          Y1=(SQ-SIN(.8*Q))*COS(Q*X)
-7114          Y2=COS(Q)*SQ+Q
-7162          Y3=Y1/Y2
-7198          CE=COS(E)
-7222          C1=(COS(.8*E)-CE)*SIN(E*X)
-7342          C2=E-SIN(E)*CE
-7402          C3=C1/C2
-7438          T1=T1+Y3+C3
-7456          IF(SENSE SWITCH 1)150,130
-7506      150 PRINT 2,T1
-7530        2 FORMAT(F10.4)
-7552      130 IF(X-.9)15,20,20
-7620       15 Z1=T1
-7632          Z2=ABS(Z1)
-7656          IF(Z2-.005)10,200,200
-7724       20 Z3=T1-1.
-7760          Z4=ABS(Z3)
-7734          IF(Z4-.005)10,200,200
-7852      200 CONTINUE
-7866       10 PRINT 19,X,RI,T1
-7936       19 FORMAT(2HX=,F4.1,/,3HRI=,F4.0,3HT1=,F7.4)
-8010      500 CONTINUE
-8046          STOP
-8058          END
```

([8]) O erro da expressão 3.24, para um valor finito de N, é máximo para $t^* = 0$. Imposta uma diferença máxima de 0.005 relativa a $t^* = 0$, o erro será inferior para $t^* = 0.002$, instante a partir do qual se começa efectivamente a utilizar a expressão 3.24.

A comparação realizada entre os valores dados por 3.29 e $I_2(x^*)$ foi efectuada para vários valores de $x^* \neq m$ ou n. Para $x^* = m$ ou n (correspondentes a pontos de discontinuidade da função $I_2(x^*)$) a série 3.24 apresenta, para $t^* = o$, erros de 50 %, mesmo para valores grandes de N; este facto não compromete de modo algum a precisão de cálculo efectuado, dado que, para $t^* = 0.002$ o número de termos escolhido pelo computador, segundo o critério apresentado, confere a 3.24 uma precisão suficiente em comparação com a dos gráficos utilizados na apresentação das soluções (Apêndice A).

([9]) Para $h^* = \infty$

$$\varepsilon_i = n\pi \quad (i = 1,2,3\ldots)$$

$$q_i = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (i = 1,2,3\ldots)$$

([10]) Os resultados obtidos podem ser solicitados para o Laboratório de Termodinâmica Aplicada (Departamento de Eng.ª Mecânica do I.S.T.).

Os valores de ε_i e q_i foram calculados para a seguinte gama de h^*

— 0.05 — 0.1 — 0.2 — 0.3 — 0.4 — 0.5 — 0.6 — 0.7 — 0.8 — — 0.9 — 1.0 — 1.2 — 1.4 — 1.6 — 1.8 — 2.0 — 2.5 — 3.0 — — 4.0 — 5.0 — 6.0 — 7.0 — 8.0 — 9.0 — 10.0 — 12.0 — — 14.0 — 16.0 — 18.0 — 20.0 — 25.0 — 30.0 — 4.00 — — 45.0 — 50.0 — 60.0 — 70.0 — 80.0 — 90.0 —

([11]) Em rigor o processamento n.º 3 previu 55 termos, no entanto por razões relativas com a capacidade de memória da máquina utilizada, teve de se optar por um número de termos ligeiramente inferior, ou seja, 54.

QUADRO II

```
NBS FORTRAN C2
START
-6600  C      PROGRAMA NUMERO 2
-6600         DIMENSION Q(55,5),E(55,5),H1(5)
-6600         DO 1 J=1,5
-6612       1 READ 2,H1(J)
-6696       2 FORMAT(F8.2)
-6713      10 DO 3 J=1,5
-6730         H=1./H1(J)
-6790         PRINT 300,J
-6814     300 FORMAT(///,2HJ=,I3,/)
-6868         DO 12 I=1,55
-6880         RI=I
-6916         IF(SENSE SWITCH 1)120,121
-6950     120 X1=(RI-1.)*3.141592
-6954         IF(SENSE SWITCH 1)122,121
-7004     121 X1=(RI-1.)*3.141592+3.141592/2.
-7100     122 DO 13 I2=1,9999
-7112         RI2=I2
-7143         X=X1+1.*RI2
-7196         IF(SENSE SWITCH 1) 1001,1002
-7214    1002 Y=-(X/H)
-7264         S=SIN(X)
-7290         C=COS(X)
-7312         T=S/C
-7340         IF(SENSE SWITCH 1) 1001,125
-7366    1001 Y=(X/H)
-7404         S=SIN(X)
-7428         C=COS(X)
-7452         COT=C/S
-7488     125 IF(SENSE SWITCH 1)126,127
-7508     126 IF(Y-COT)13,16,15
-7576     127 IF(Y-T)15,16,13
-7644      13 CONTINUE
-7660      15 X=X-1.
-7716      50 X=X+.1
-7752         IF(SENSE SWITCH 1)128,129
-7772     128 Y=(X/H)
-7808         S=SIN(X)
-7832         C=COS(X)
-7856         COT=C/S
-7892         IF(SENSE SWITCH 1)130,129
-7912     129 Y=-(X/H)
-7960         S=SIN(X)
-7984         C=COS(X)
-8008         T=S/C
-8044     130 IF(SENSE SWITCH 1)131,132
-8064     131 IF(Y-COT)13,16,19
-8132     132 IF(Y-T)19,16,18
-8200      18 GO TO 50
-8208      19 X=-.1+X
-8256      51 X=X+.01
-8292         IF(SENSE SWITCH 1)133,134
-8312     133 Y=(X/H)
-8348         S=SIN(X)
-8372         C=COS(X)
-8396         COT=C/S
-8432         IF(SENSE SWITCH 1)135,134
-8452     134 Y=-(X/H)
-8500         S=SIN(X)
-8524         C=COS(X)
-8548         T=S/C
-8584     135 IF(SENSE SWITCH 1)136,137

-8604     136 IF(Y-COT)21,16,22
-8672     137 IF(Y-T)22,16,21
-8740      21 GO TO 51
-8748      22 X=-.01+X
-8796      52 X=X+.001
-8832         IF(SENSE SWITCH 1)138,139
-8852     138 Y=(X/H)
-8888         S=SIN(X)
-8912         C=COS(X)
-8936         COT=C/S
-8972         IF(SENSE SWITCH 1)141,139
-8992     139 Y=-(X/H)
-9040         S=SIN(X)
-9064         C=COS(X)
-9088         T=S/C
-9124     141 IF(SENSE SWITCH 1)142,143
-9144     142 IF(Y-COT)24,16,16
-9212     143 IF(Y-T)16,16,24
-9280      24 GO TO 52
-9288      16 L=RI
-9324         IF(SENSE SWITCH 1)149,150
-9344     149 Q(L,J)=X
-9416         IF(SENSE SWITCH 1)151,150
-9436     150 E(L,J)=X
-9508     151 IF(SENSE SWITCH 1)152,153
-9528     152 PUNCH 29,Q(L,J)
-9612      29 FORMAT(F8.3)
-9634         PRINT 290,L,J,Q(L,J)
-9742     290 FORMAT(3X,2HQ(,I2,1H,,I2,2H)=,F8.3)
-9812         IF(SENSE SWITCH 1)12,153
-9832     153 PUNCH 30,E(L,J)
-9916      30 FORMAT(F8.3)
-9938         PRINT 291,L,J,E(L,J)
J0046     291 FORMAT(3X,2HE(,I2,1H,,I2,2H)=,F8.3)
J0116      12 CONTINUE
J0152       3 CONTINUE
J0188         IF(SENSE SWITCH 1)154,155
J0208     154 STOP 1000
J0220         GO TO 10
J0228     155 STOP 2000
J0240         END
```

QUADRO III

```
START
-6600  C      PROGRAMA NUMERO 3
-6600         DIMENSION Q(54),E(54),T(35),U(5),X(4)
-6600         DIMENSION Y(54),Z(54),CQ(4,54),SE(4,54)
-6600         DO 1 L=1,54
-6612       1 READ 2,Q(L)
-6696       2 FORMAT(F8.3)
-6718         DO 7 L=1,54
-6730       8 READ 2,E(L)
-6814         DO 12 K=1,35
-6926      12 READ 11,T(K)
-6910      11 FORMAT(F8.3)
-6932         DO 13 M=1,5
-6944      13 READ 14,U(M)
-7028      14 FORMAT(F4.1)
-7050         DO 15 I=1,4
-7062      15 READ 14 X(I)
-7146         READ 16,H1
-7170      16 FORMAT(F8.2)
-7192         DO 17 M=1,5
-7204         RN=U(M)-.2
-7264         RM=U(M)
-7300         PUNCH 18,RN,RM
-7336      18 FORMAT(///,6X,3HRN=,F4.1,3X,3HRM=,F4.1,/)
-7424         IF(SENSE SWITCH 1) 19,20
-7444      19 PRINT 18,RN,RM
-7480      20 DO 400 L=1,54
-7492         QM=RM*Q(L)
-7552         QN=RN*Q(L)
-7612         EM=RM*E(L)
-7672         EN=RN*E(L)
-7732         A1=SIN(QM)-SIN(QN)
-7804         A2=COS(Q(L))*SIN(Q(L))*Q(L)
-7943         Y(L)=A1/A2
-8008         B1=COS(EN)-COS(EM)
-8080         B2=E(L)-SIN(E(L))*COS(E(L))
-8236         Z(L)=B1/B2
-8296     400 CONTINUE
-8332         DO 401 I=1,4
-8344         DO 402 L=1,54
-8356         CQ(I,L)=COS(Q(L)*X(I))
-8512         SE(I,L)=SIN(E(L)*X(I))
-8660     402 CONTINUE
-8704     401 CONTINUE
-8740         DO 5 I=1,4
-8752         PUNCH 6,X(I),H1
-8812       6 FORMAT(// 5X,2HX=,F4.1,3X,3HH1=,F4.2,//)
-8896         IF(SENSE SWITCH 1)21,22
-8916      21 PRINT 6,X(I) H1
-8972      22 DO 200 K=1,35
-8990         T1=0.
-9002         DO 300 L=1,54
-9014         EE1=E(L)**2*T(K)
-9110         IF(EE1-55.)304,304,300
-9170     304 EE2=EXP(EE1)
-9202     309 IF(EE1-55.)310,310,311
-9270     310 EE=1./EE2
-9306     311 IF(EE1-55.)312,312,313
-9374     313 EE=0.
-9336     312 EQ1=Q(L)**2*T(K)
-9402         IF(EQ1-55.)301,301,302
-9550     301 EQ2=EXP(EQ1)
-9574     302 IF(EQ1-55.)303,303,305
-9642     303 EQ=1./EQ2
-9670     305 IF(EQ1-55.)307,307,306
-9746     307 F1=Y(L)*CQ(I,L)*EQ
-9878         F2=Z(L)*SE(I,L)*EE
J0010         T1=T1+F1+F2

J0058     300 CONTINUE
J0094     306 S=T(K)
J0130         PUNCH 30,S,T1,L
J0178      30 FORMAT(3X,2HT=,F8.3,3X,3HT1=,F6.4,3X,2HL=,I2)
J0266         IF(SENSE SWITCH 1)31,200
J0286      31 PRINT 30,S,T1,L
J0334     200 CONTINUE
J0370       5 CONTINUE
J0406         STOP 1000
J0418      17 CONTINUE
J0454         STOP 2000
J0466         END
```

AGRADECIMENTO

— ao Prof. J. J. Delgado Domingos pelo estímulo recebido e sugestões valiosas que contribuiram de modo decisivo para a realização deste trababalho;

— ao Dr. Marques Henriques e G. Moreira pelo auxílio prestado na programação dos problemas;

— à Companhia I. B. M. Portuguesa pelas facilidades concedidas na utilização do seu computador 1620.

BIBLIOGRAFIA

[1] — J. J. Delgado Domingos — Curso de Caldeiras e Permutadores de Calor (A. E. I. S. T.)

[2] — J. J. Delgado Domingos — Condução em Sólidos em Regime Variável (TÉCNICA — separata n.º 325)

[3] — Carslaw e Jaeger - Conduction of Heat in solids — Oxford U. P.

[4] — Courant, Hilbert — Methods of Mathematical Physics — Interscience.

[5] — A. Angot - Compléments de Mathematique

[6] — Weiner Booley — Theory of Thermal Stress — Wiley

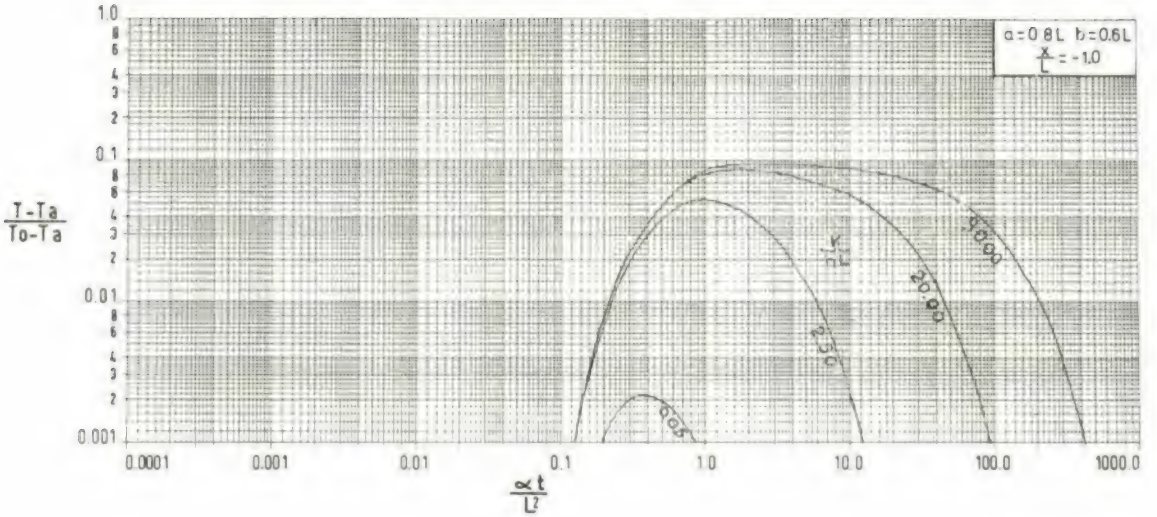
[7] — A. Alves — Curso de Cálculo (A. E. I. S. T.)

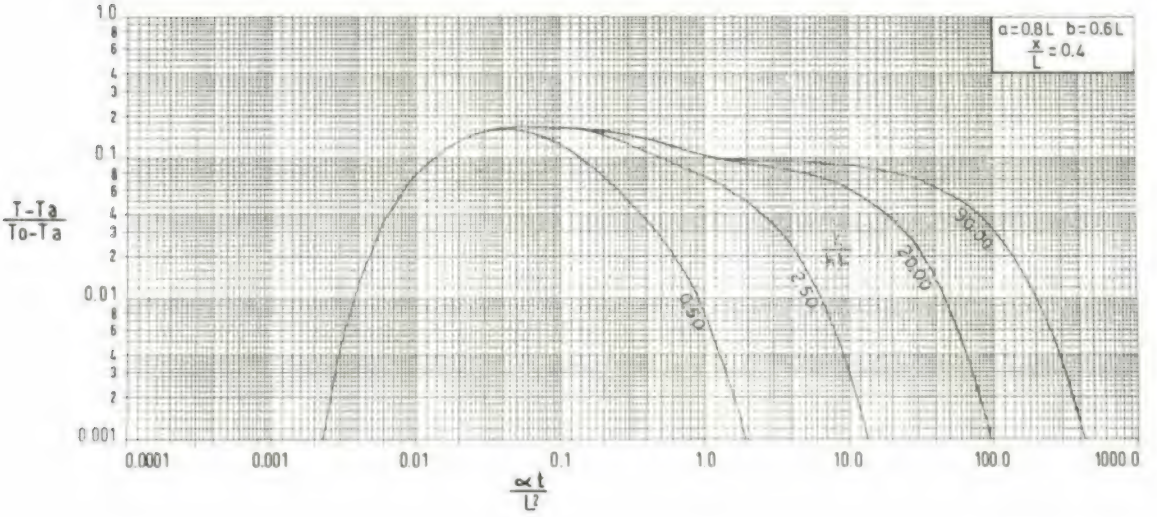
[8] — Vedat Arpaci — Conduction Heat Transfer — Wesley

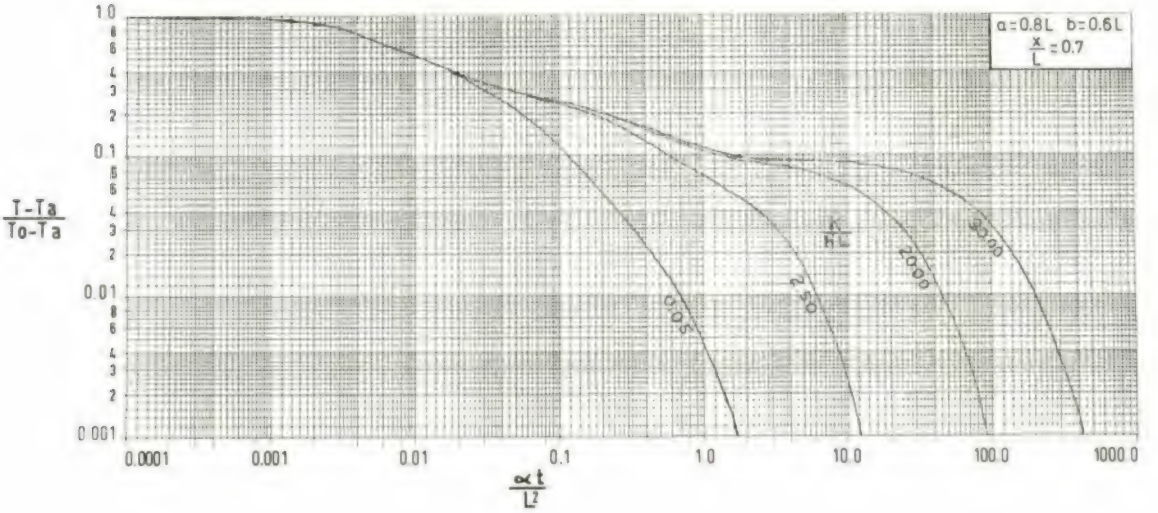
[9] — Mac Adms — Heat Transmission — Mc Graw — — Hill

[10] — Heisler — Trans A S M E — 1947

APÊNDICE A


a=0.8L b=0.6L
x/L = -1.0
(T-Ta)/(To-Ta)
αt/L²
0.05
2.50
20.00
30.00
1.0
0.1
0.01
0.001
0.0001
0.001
0.01
0.1
1.0
10.0
100.0
1000.0


a=0.8L b=0.6L
x/L = 0.4
(T-Ta)/(To-Ta)
αt/L²
0.50
2.50
20.00
30.00
1.0
0.1
0.01
0.001
0.0001
0.001
0.01
0.1
1.0
10.0
100.0
1000.0


a=0.8L b=0.6L
x/L = 0.7
(T-Ta)/(To-Ta)
αt/L²
0.05
2.50
20.00
30.00
1.0
0.1
0.01
0.001
0.0001
0.001
0.01
0.1
1.0
10.0
100.0
1000.0

C. D. U. 621.311.5/91

ELEMENTOS SOBRE A PRODUÇÃO E O CONSUMO DE ENERGIA NA REDE ELÉCTRICA NACIONAL (*)

— Breve nota mensal

As afluências ao conjunto do sistema registadas durante o mês de Agosto situaram-se abaixo da média, tendo totalizado 97 GWh, valor a que corresponde um coeficiente de produtibilidade hidroeléctrica de 0,66 e que tem uma probabilidade de ser excedido da ordem dos 89 %.

Estas afluências abaixo da média resultaram não só das reduzidas afluências «internas» mas também do facto de o caudal transitado em Miranda se ter situado sensìvelmente abaixo da média, essencialmente pelo reduzido desarmazenamento verificado em Ricobayo.

As afluências acumuladas desde o início do ano hidrológico correspondem a um coeficiente de produtibilidade hidroeléctrica de 1,35.

II — Elementos gerais (GWh)

	a) Mensais		Variação
	1968	1969	%
Produção hidráulica (P_h)	509,9	469,9	+ 52
Produção térmica (P_t)	127,3	12,7	— 90
Produção total (P_T)	437,2	482,6	+ 10
Energia recebida de empresas não pertencentes ao RNC (E_r)	0,2	0,3	+ 50
Exportações (Ex)	1,7	3,0	+ 76
Importações (I)	13,6	3,0	— 79
Saldo importador (S_I)	+11,9	0,0	—100
Cons. em bomb. hidroelé. (C_b) (1)	0,0	0,0	0
Produção para consumos perman. (P_{cp})	413,0	434,9	(1) + 5,3
Produção para consumos não perman. (P_{cnp})	36,3	48,0	+ 32
Total	449,3	482,9	+ 7
Coeficiente de hidraulicidade	0,78	0,66	—

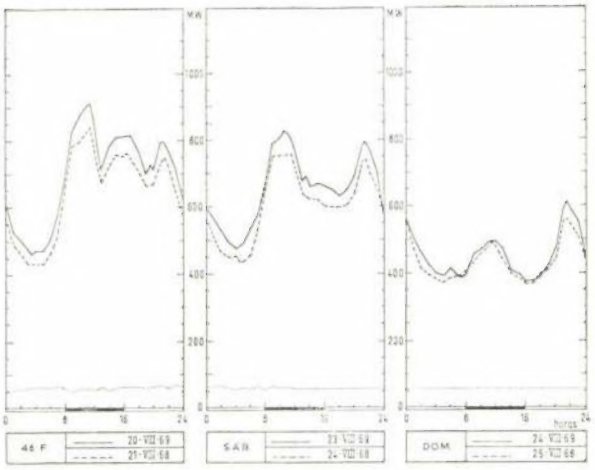
NOTA:

(1) O aumento percentual da produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 7,6 e 8,9 %.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira:	
			1968	1969
Produção hidráulica		(P_h) MWh	12 379	16 781
Produção térmica		(P_t) MWh	3 030	70
Produção total		(P_T) MWh	15 409	16 851
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	30	65
	Import.	(I) MWh	380	126
Cons. em bomb. hidroel. (C_b) MWh			0	0
Prod. p.ª cons. perm. (P_{cp}) MWh			14 531	15 583
Prod. p.ª cons. não perm. (P_{cnp}) MWh			1 228	1 348
TOTAL		P_T+(-Ex) MWh	15 759	16 911
Características dos diagramas	P_T+(I-Ex)	Potência máx. MW	842	911
		Potência mín. MW	434	462
		Utiliz. da ponta horas	18,7	18,6
		Factor de carga	0,78	0,77
	P_{cp}	Potência máx. MW	793	864
		Potência mín. MW	380	404
		Utiliz. da ponta horas	18,3	18,0
		Factor de carga	0,76	0,75

AGOSTO



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês	
	GWh	% (1)
Alto Rabagão	850,1	87,4
Paradela	182,9	82,2
Venda Nova	106,8	83,4
Salamonde	25,8	93,5
Caniçada	15,9	48,0
Vilar	85,5	85,0
Cabril	294,9	86,9
Castelo do Bode	8[illegible],7	54,4
Guilhofrei	2,1	25,3
Lagoa Comprida	(2) 31,8	81,7
Santa Luzia	51,0	82,8
Pracana	9,4	72,9
Póvoa	(3) 9,0	62,5
Total { com A. Rabagão	1753,9	82,6
Total { sem A. Rabagão	903,8	78,6

NOTAS

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 3,2 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 2,3 GWh no fim do mês.

(3) Inclui 2,5 GWh armazenados no açude do Poio no início do mês e 2,2 GWh no fim do mês.

(*) *Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.). As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

TABELAS TECNICAS PARA ENGENHARIA CIVIL

6ª edição revista e actualizada

por J.S. Brazão Farinha

Preço 200$00

MANUAL DE HIDRAULICA

por Armando C. Lencastre

2ª edição revista e actualizada

Preço 240$00

PEDIDOS A "TECNICA"

Desconto de 10% aos nossos assinantes

C. D. U. 624.131.25 : 624.131.377

DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DE CORTE DE ROCHAS E DE DESLIZAMENTO DE DIACLASES (1)

INFLUÊNCIA DA OBLIQUIDADE DA SUPERFÍCIE DE ENSAIO

por F. PERES RODRIGUES *

RESUMO

Descreve-se a aparelhagem e o método de ensaio utilizado pelo LNEC na determinação das características de corte de rocha e de deslizamento de diaclases em provetes prismáticos com a dimensão aproximada de 14 × 18 × 18 cm³.

Estuda-se teòricamente a influência da obliquidade da superfície de rotura ou de deslizamento nos valores da coesão e do ângulo de atrito e analisam-se alguns casos particulares.

Verifica-se, por meio de ensaios, a boa concordância existente entre a teoria e os resultados experimentais.

SYNOPSIS

The testing equipment and methods used by the LNEC for determining the shear throughout the rock and the slide along joints in prismatic specimens about 14 × 18 × 18 cm³ are described.

The influence of the obliquity of the failure or sliding surfaces on the values of the cohesion and the angles of friction is theoretically studied and some particular cases are analyzed.

According to the tests carried out, the agreement between theoretical and experimental results is good.

1 — CONSIDERAÇÕES GERAIS

O Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) possui no Serviço de Barragens (SB), Divisão de Fundações e Túneis (DFT), uma máquina de ensaios que permite a determinação das características de corte de rochas ou de deslizamento de diaclases a partir de ensaios realizados em provetes prismáticos com a altura máxima de 14 cm e as dimensões máximas da secção transversal de 18 × 18 cm².

A máquina de ensaios (fig. 1) é constituída por um quadro metálico (A) com cerca de 1 m de lado. Aplicado à travessa superior existe um macaco hidráulico (B) com a capacidade de 40 toneladas ligado a um sistema de manutenção da carga constante (C) e aplicado a um dos montantes um outro macaco hidráulico (D) com a capacidade de 50 toneladas; ambos os macacos hidráulicos transmitem as forças ao provete de ensaio por meio de rótulas (E) de forma a permitirem uma distribuição quanto possível uniforme da tensão. Uma bomba hidráulica (F) ligada aos dois macacos permite, por meio de um comutador (G), aplicar forças a cada um deles, separadamente. O provete de ensaio é colocado no interior de dois pequenos quadros metálicos (H) rígidos, o inferior fixo e o superior móvel,

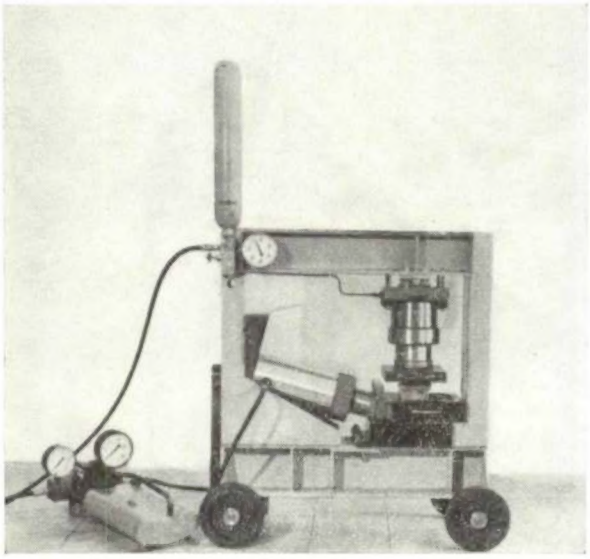


Fig 1

deixando entre eles um afastamento julgado conveniente para o ensaio, em geral 1 a 3 cm, por

(1) Trabalho apresentado em inglês ao Simpósio Internacional de Mecânica das Rochas, Madrid, Outubro de 1968 e em português às 2.as Jornadas de Engenharia e Arquitectura do Ultramar, Luanda, Maio de 1969.

* Engenheiro Especialista, Chefe da Divisão de Fundações e Túneis do Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.